АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ IV
ВЫПУСК
3

U. of ILL. LIBRARY
JUL 20 1971
CHICAGO CIRCLE

1959

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1959

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С., Линник Ю. В., Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В., Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамов Л. М. Энтропия автоморфизма соленоидальной группы 249
Abramov L. M. The Entropy of an Automorphism of a Slenoidal Group . . 254
Клосс Б. М. О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах 255
Kloss R. M. Probability Distributions on Bicompact Topological Groups . . 290
Розанов Ю. А. Спектральный анализ абстрактных функций 291
Rozanov Yu. A. Spectral Analysis of Abstract Functions 310
Линник Ю. В. Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга 311
Linnik Yu. V. An Information Theorotic Poof of the Central Limit Theorem on Lindeberg Conditions 321
Masani P. and *Wiener N.* On Bivariate Stationary Processes and the Factorization of Matrix-valued Functions 322
Мазани П. и *Винер Н.* О двумерных стационарных процессах и разложении матрично-значных функций 331
Хасьминский Р. З. О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}u+vu=0$ . . . 332
Hasminski R. Z. On Positive Solutions of the Equation $\mathfrak{A}u+vu=0$ . . . 341

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семинвариантов . . . 341
Leonov V. P. et Shiriaev A. N. Zur le cacul des sémi-invariants 355
Гирсанов И. В. Об одном свойстве невырожденных диффузионных процессов . 355
Girsanov I. V. Über eine Eigenschaft des nichtzinguliaren Diffusionsprozesses 361
Башарин Г. П. О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин 361
Basharin G. P. On a Statistical Estimate for the Entropy of a Sequence of Independent Random Variables 364

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу М. Фиш «Теория вероятностей и математическая статистика» (2 издание). *Гнеденко Б. В.* 365

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В-9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1959

ЧИТ. ЗАЛ

ЭНТРОПИЯ АВТОМОРФИЗМА СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Л. М. АБРАМОВ

После того, как в работах А. Н. Колмогорова [1] и Я. Г. Синая [2] было введено понятие энтропии автоморфизма пространства Лебега, возникла задача фактического вычисления энтропии для конкретных классов автоморфизмов. В настоящей работе эта задача решается для автоморфизмов соленоидальных групп.

По поводу используемых в работе понятий теории меры и метрической теории динамических систем (пространство Лебега, измеримое разбиение, фактор-пространство, автоморфизм, гомоморфизм и т. п.) см. [3].

1. Энтропия автоморфизма. В этом пункте кратко излагаются определения и факты, относящиеся к понятию энтропии автоморфизма и используемые в дальнейшем. Изложение следует работе В. А. Рохлина [4].

Пусть T — автоморфизм пространства Лебега M с мерой μ. Если ξ—измеримое, не более, чем счетное, разбиение пространства M с элементами $c_1, c_2, \ldots$, то величина

$$H(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu c_k \log \mu c_k$$

(логарифм — двоичный; если $\mu c_k = 0$, то, по определению, $\mu c_k \log \mu c_k = 0$ называется энтропией разбиения ξ. Множество всех разбиений с конечной энтропией обозначается Z. Положим для $\xi \in Z$:

$$\xi_T = \prod_{i=-\infty}^{\infty} T^i \xi, \quad \xi_T^{(-p,\,p)} = \prod_{i=-p+1}^{p-1} T^i \xi, \quad \xi_T^p = \prod_{i=0}^{p-1} T^i \xi,$$

$$h(T, \xi) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} H(\xi_T^p).$$

Здесь $\prod$ есть знак перемножения разбиений ($\prod \eta_i$ есть разбиение, элементы которого суть пересечения элементов разбиений η_i). Предел всегда существует. Число

$$h(T) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi)$$

называется энтропией автоморфизма T. Формула

$$h(T^n) = |n|\, h(T)$$

связывает энтропию автоморфизма и энтропию его степени (см. [4], п. 4).

59
100-495/2

Рациональные числа $\frac{1}{(mn)^q}$, $q = 0, 1, \ldots$ составляют систему образующих группы R_{mn}. Следовательно, найдется такое q_0, что характер α_{s_0}, соответствующий числу $s_0 = \frac{1}{(mn)^{q_0}}$, переводит точки x_1 и x_2 в различные точки окружности K. Пусть $z_1 = \alpha_{s_0}(x_1)$, $z_2 = \alpha_{s_0}(x_2)$ и Δ — длина меньшей из дуг, соединяющих точки z_1 и z_2. Выберем теперь p столь большим, чтобы $p \geqslant q_0 + 1$ и $\frac{1}{n^{2p-1}} < \frac{\Delta}{(mn)^{p-q_0-1}}$.

Обозначим f_i, где i — натуральное число, гомоморфизм пространства K, определяемый формулой

$$f_i(z) = z^i, \quad (z \in K)$$

γ_k — разбиение пространства K на прообразы элементов разбиения τ при гомоморфизме f_{i_k}, где $i_k = m^{p-k-1} n^{p+k-1}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm (p-1)$ и положим $s = \frac{1}{(mn)^{p-1}}$.

Для каждого k имеет место соотношение:

$$T_r^k \xi = \alpha_s^{-1}(\gamma_k).$$

Действительно, $\alpha_s(T_r^k \xi) = T_r^{*k} \alpha_s(\xi) = \alpha_{t_k}(\xi)$, где $t_k = r^k s = \frac{1}{i_k}$. Далее имеем $\alpha_{t_k}(\xi) = f_{i_k}^{-1}[\alpha_1(\xi)] = f_{i_k}^{-1}(\tau) = \gamma_k$.

Таким образом, $\xi_{T_r}^{(-p,\, p)} = \alpha_s^{-1}\left(\prod_{k=-p+1}^{p-1} \gamma_k\right)$.

Как следует из определения, разбиение γ_k имеет такой вид: если мы занумеруем подряд элементы произведения разбиений $\zeta(m^{p-k} n^{p+k-1})$ и $\zeta(m^{p-k-1} n^{p+k})$, то каждый элемент разбиения γ_k есть соединение всех таких частей, разность номеров которых делится на $m + n - 1$.

Непосредственно проверяется, что благодаря взаимной простоте m и n разбиение $\prod_{k=-p+1}^{p-1} \gamma_k$ не крупнее разбиения $\zeta(n^{2p-1})$. Поэтому любые две точки на окружности K, разбивающие ее на дуги, большие $\frac{1}{n^{2p-1}}$, принадлежат различным элементам разбиения $\prod_{k=-p+1}^{p-1} \gamma_k$.

Так как $\frac{1}{(mn)^{q_0}} : \frac{1}{(mn)^{p-1}} = (mn)^{p-q_0-1}$, то $z_1' = \alpha_s(x_1) \in f_t^{-1}(z_1)$ и $z_2' = \alpha_s(x_2) \in f_t^{-1}(z_2)$, при $t = (mn)^{p-q_0-1}$. Следовательно, меньшая дуга, соединяющая точки z_1' и z_2', больше $\frac{\Delta}{(mn)^{p-q_0-1}}$. В силу выбора p, точки z_1' и z_2' принадлежат различным элементам разбиения $\prod_{k=-p+1}^{p-1} \gamma_k$, а точки x_1 и x_2 — различным элементам разбиения $\xi_{T_r}^{(-p,\, p)}$.

b) Докажем теперь, что $h(T_r, \xi) = \log n$.

Мы сохраним здесь обозначения, введенные в а).

Разбиение $f_l^{-1}[\zeta(n^p)]$, при $l = n^{p-1}$ обозначим η_p, и пусть $\lambda_p = \alpha_s^{-1}(\eta_p)$, где $s = \frac{1}{(mn)^{p-1}}$. Легко проверяется, что $\eta_p \leqslant \prod_{k=0}^{p-1} \gamma_k$, и, следовательно, $\lambda_p \leqslant \xi_{T_r}^p = \prod_{k=0}^{p-1} T_r^k \xi$. Так как λ_p есть разбиение X на n^p частей равной меры, то $H\left(\xi_{T_r}^p\right) \geqslant H(\lambda_p) = p \log n$. Следовательно, $h(T_r, \xi) \geqslant \log n$.

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $\xi_m = \alpha_1^{-1}[\zeta(m)]$ и $\nu_k = f_{i_k}^{-1}[\zeta(m)]$, где $i_k = m^{p-k-1} n^{p+k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, (p-1)$.

Разбиение $\prod_{k=0}^{p-1} \gamma_k$ есть подразбиение разбиения η_p. Его элементы суть пересечения элементов разбиения η_p с элементами разбиений ν_k. Простым подсчетом проверяем, что при этом к точкам деления разбиения η_p добавляется не более, чем $m^p \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{n}{m}\right)^s = \frac{m}{n-m}(n^p - m^p)$ новых точек деления. Каждая из этих точек разбивает не более одного элемента разбиения η_p, и, так как $m \leqslant \frac{n}{2}$, то их число не превосходит n^p.

Так как число элементов разбиения λ_p равно n^p, то энтропия разбиения $\xi_{T_r}^p$ не превосходит энтропии разбиения группы X, которое получится, если каждый элемент разбиения λ_p разделить на две части равной меры. Следовательно,

$$\frac{1}{p} H\left(\xi_{T_r}^p\right) \leqslant \frac{1}{p} \log 2n^p = \log n + \frac{1}{p}$$

и

$$h(T_r, \xi) \leqslant \log n.$$

Освободимся теперь от ограничения, наложенного на числа m и n в начале настоящего пункта. Так как $|m| \neq n$, то найдется такое целое число p, что $\left(\frac{m}{n}\right)^{2p} \leqslant \frac{1}{2}$. Доказательство теоремы получается при помощи следующей цепочки равенств:

$$h(T_{\frac{m}{n}}) = \frac{1}{2|p|} h\left(T_{\frac{m}{n}}^{2p}\right) = \frac{1}{2|p|} h\left(T_{\left(\frac{m}{n}\right)^{2p}}\right) = \frac{1}{2|p|} h\left(T_{\left(\frac{n}{m}\right)^{2p}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|p|} \log \max\left\{|m|^{2|p|}, n^{2|p|}\right\} = \log \max\{|m|, n\}.$$

4. Доказательство теоремы в случае $R \supset R_{mn}$. Пусть $p_0 = 1, p_1, p_2, \ldots$ — последовательность всех натуральных чисел, взаимно простых с m и n, и таких, что $\frac{1}{p_k} \in R$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через G_k подгруппу группы R, которая получится, если каждое число группы $R_{mn} \subset R$ разделить на произведение $p_0 \cdot p_1 \ldots p_k$, и через ξ_k — измеримое разбиение группы X на классы смежности по аннулятору группы G_k в X.

При $k = 0, 1, \ldots$ фактор-пространство X/ξ_k есть, в хорошо известном смысле, группа характеров группы G_k, и так как группа G_k инвариантна отно-

сительно автоморфизмов T_r^* и T_r^{*-1}, то $T_r\xi_k = \xi_k$. Обозначим S_k автоморфизм, индуцированный автоморфизмом T_r в фактор-пространстве X/ξ_k. Сопряженный с ним автоморфизм S_k^* группы G_k совпадает с автоморфизмом, индуцируемым в группе G_k автоморфизмом T_r^*. При любом k группа G_k изоморфна группе $G_0 = R_{mn}$, и в силу коммутативности умножения рациональных чисел автоморфизм S_k^* изоморфен автоморфизму S_0^*. Следовательно, все автоморфизмы S_k изоморфны автоморфизму S_0 и $h(S_k) = h(S_0)$. Но S_0 есть автоморфизм группы характеров группы $G_0 = R_{mn}$ и, как доказано в п. 3,

$$h(S_0) = \log \max\{|m|, n\}.$$

Так как $G_k \subseteq G_{k+1}$ и $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k = R$, то $\xi_k \leqslant \xi_{k+1}$ и $\prod_{k=0}^{\infty} \xi_k = \varepsilon$. Применяя лемму п. 1, получаем:

$$h(T_r) = \lim_{k\to\infty} h(S_k) = h(S_0) = \log \max\{|m|, n\}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор благодарит В. А. Рохлина за постановку задачи, советы и указания.

Поступила в редакцию
9. 3. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизма, ДАН СССР, **124**, № 4 (1959).
[2] Я. Г. Синай, Об энтропии динамической системы, ДАН СССР, **124**, № 4 (1959).
[3] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, УМН, **IV**, вып. 2.
[4] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, ДАН СССР, **124**, № 5 (1959).
[5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, М., 1954.

THE ENTROPY OF AN AUTOMORPHISM OF A SOLENOIDAL GROUP

L. M. ABRAMOV (KOLOMNA)

(Summary)

Let us denote by X a group of characters for subgroup R of an additive group of rational numbers and by T its automorphism adjoint to the automorphism of group R, which is given by multiplying by the irreducible fraction $\frac{m}{n}$. In this paper it is proved that the entropy of such an automorphism equals $\log(\max\{|m|, n\})$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1959

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА БИКОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Б. М. КЛОСС

Введение

Данная работа представляет собой первую часть исследования по предельным теоремам для композиций бесконечного числа случайных независимых величин со значениями из топологической группы. Здесь мы разберем случай бикомпактной топологической группы.

Наиболее естественно сначала поставить вопрос об отыскании предельных закономерностей при последовательном компонировании бесконечной последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Предельное распределение ищется в слабой топологии мер. Задача эта привлекала многих исследователей и получила свое исчерпывающее решение в различных частных случаях. Так, для группы вращений окружности класс возможных предельных распределений в рассматриваемом случае был изучен П. Леви [10], для конечных абелевых групп — в работах Н. Н. Воробьева [23] и Дворецкого и Вольфовица [2], для бикомпактных абелевых групп — в статье Прекопа, Реньи и Урбаника [14]. В некоммутативном случае известны результаты Я. И. Ривкинда [16] для связных компактных групп с аксиомой счетности и японских математиков Кавада и Ито [6], решивших эту задачу для всех компактных групп, обладающих аксиомой счетности.

Как выяснилось, предельные законы, если они существуют, являются устойчивыми законами, т. е. инвариантными относительно операции свертки. Последние оказались равномерными распределениями на замкнутых подгруппах рассматриваемой группы G.

Полное решение изложенной задачи для произвольной бикомпактной группы было опубликовано нами в заметке [7]. Одновременно решение проблемы было получено и К. Урбаником [22]. В настоящей работе результаты [7] снабжены подробными доказательствами.

Необходимо отметить, что основным методом исследования в работах почти всех перечисленных авторов является аппарат теории линейных представлений бикомпактных топологических групп. Решающей в этой теории является теорема Петера — Вейля о полноте системы неприводимых представлений. В нашей же работе за основу принят другой метод — метод топологических полугрупп. Суть дела в следующем. Известно (см. статью Венделя [26]), что совокупность всех регулярных вероятностных мер $S(G)$ на бикомпактной группе G сама образует полу-

группу относительно операции свертки. В слабой топологии мер $S(G)$ превращается в бикомпактную хаусдорфову полугруппу. Оказывается, что построенная таким образом полугруппа мер $S(G)$ полностью определяет саму группу G, а ее идемпотентные элементы являются инвариантными мерами на соответствующих подгруппах G (так называемые устойчивые законы, о которых уже шла речь). Дальнейшие результаты связаны с изучением свойств этой полугруппы. Подробное обоснование перечисленных замечаний и построение полугруппы $S(G)$ проводится в § 1 настоящей работы.

Получение основных результатов стало возможным благодаря большому развитию, особенно в последние годы, теории топологических полугрупп. Поэтому § 2 посвящен краткому изложению тех необходимых фактов, относящихся к теории бикомпактных хаусдорфовых полугрупп, которые используются в данной работе. В изложении материала мы придерживаемся статьи Шт. Шварца [17].

В § 3 решается упоминавшаяся задача о пределе композиций бесконечного числа одинаково распределенных независимых случайных величин. Теорема 4 утверждает, что предельный закон в этом случае устойчив и, наоборот, всякий устойчивый закон является предельным для композиций одинаково распределенных независимых случайных величин. В дальнейшем устанавливаются необходимые и достаточные условия существования предела для композиций равнораспределенных независимых случайных величин.

В § 4 разбираются различные предельные теоремы. Сходимость композиций независимых одинаково распределенных случайных величин не всегда имеет место. Однако, при соответствующей нормировке, всегда можно добиться того, что последние будут сходиться, причем опять же — к устойчивому закону. Доказательству этого предложения посвящена теорема 7. На основании этой теоремы можно провести эффективную классификацию всех вероятностных мер на бикомпактной группе G, которая в § 2 вводилась сначала весьма абстрактно, исходя из свойств полугруппы $S(G)$.

Аппроксимируя произвольные бикомпактные группы группами с аксиомой счетности, можно доказать эргодическую теорему и предельную теорему для неодинаково распределенных независимых взаимно коммутирующих случайных величин. Эти теоремы являются обобщением на произвольные бикомпактные группы соответствующих теорем Кавада и Ито [6], доказанных ими для компактных групп, топологическое пространство которых допускает аксиому счетности.

В конце параграфа говорится о том, что полученные предельные и эргодические теоремы могут интерпретироваться как таковые для некоторых специальных марковских процессов на бикомпактной группе.

В теореме 12 устанавливается общий принцип сходимости для бикомпактных групп: при помощи нормировки сдвигом всегда можно добиться того, что композиции произвольных независимых случайных величин будут сходиться к предельному закону.

Оценкам скорости сходимости композиций независимых случайных величин к предельному закону отводится § 5.

В виде дополнения помещается § 6, посвященный исследованию случайных величин, принимающих свои значения уже из бикомпактной хаусдорфовой полугруппы. Оказывается, развитые выше методы можно перенести и на этот случай. Особенно эффективно такое исследование проводится в коммутативном случае, где получены классификация вероятностных мер на бикомпактной полугруппе и некоторые предельные теоремы для композиций независимых случайных величин. Видимо, на этом пути можно получить и более сильные результаты. У нас же они имеют характер беглого наброска без претензии на построение развернутой теории. Мы и не ставили перед собой такую цель.

Следующую часть, которая выйдет из печати вслед за настоящей работой, мы думаем посвятить изучению случайных величин на коммутативных группах.

Настоящая работа возникла по инициативе и под руководством проф. В. Я. Козлова. Я горячо благодарю В. Я. Козлова за его внимание к работе и ценные советы.

§ 1. Построение полугруппы мер

1. 1. Случайные величины на группах. Независимость. Объектом нашего изучения являются случайные величины со значениями из данной бикомпактной топологической группы G. Если имеется такая случайная величина ξ, то распределение вероятностей для нее, естественно, задается при помощи некоторой нормированной меры μ. О всех вероятностных мерах на группе G мы будем предполагать, что они определены на наименьшей σ-алгебре подмножеств из G, включающей все открытые множества, т. е. на системе всех борелевских множеств. Таким образом, для любого борелевского множества E

$$\mu(E) = \text{Вер}\{\xi \in E\},$$

причем $\mu(G) = 1$.

Запись групповой операции у нас будет мультипликативная. Если ξ_1 и ξ_2 — две случайные величины в группе G, то величину $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ будем называть *композицией* случайных величин ξ_1 и ξ_2. Если случайные величины ξ и η независимы (независимость понимается в обычном смысле, принятом в теории вероятностей), то, как легко вычислить, мера, задающая распределение композиции $\xi \cdot \eta$, будет определяться как свертка мер μ и ν, задающих распределение величин ξ и η:

$$\mu * \nu(E) = \int_G \mu(Ex^{-1})\, d\nu(x). \tag{1.1}$$

Для системы независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с законами распределения $\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots, \mu_n(E)$ распределение их композиции определяется индуктивным путем по формуле

$$\mu^{(n)}(E) = \int_G \mu^{(n-1)}(Ex^{-1})\, d\mu_n(x), \tag{1.2}$$

где $\mu^{(1)}(E) = \mu_1(E)$. В этом случае будем говорить, что мера $\mu^{(n)}$ является сверткой мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

1.2. Полугруппа мер $S(G)$. Если аддитивные функции множеств — меры — определены на топологическом пространстве, то на них часто накладывают одно ограничение, которое мы вводим и в рассматриваемом случае:

меры, задающие распределения случайных величин, должны быть регулярными. Это значит, что мера любого измеримого множества равна нижней грани мер всех открытых множеств, содержащих данное множество, и верхней грани всех замкнутых множеств, содержащихся в данном множестве.

Пусть $S(G)$ — множество всех неотрицательных, счетно-аддитивных регулярных мер μ, определенных на бикомпактной группе G, таких, что $\mu(G)=1$. Покажем, что в этом множестве можно так ввести топологию, что с определенной выше операцией свертки (1.1) оно превратится в полугруппу, топологическое пространство которой бикомпактно и хаусдорфово.

Обозначим $C(G)$ банахово пространство непрерывных действительных функций $f(x)$, определенных на G. Известно (см. [4]), что существует взаимно однозначное соответствие между мерами $\mu\in S(G)$ и линейными неотрицательными функционалами $\Phi(f)=\int f(x)\,d\mu(x)$, заданными на $C(G)$. В сопряженном пространстве $\overline{C}(G)$ можно задать слабую топологию функционалов, так что $\overline{C}(G)$ превращается в хаусдорфово топологическое пространство. При этом во множестве $S(G)$ также можно задать слабую топологию, в которой $\mu_\alpha\to\mu$ означает слабую сходимость соответствующих функционалов:

$$\int f(x)\,d\mu_\alpha(x)\to\int f\ (x)\,d\mu(x)$$

для любой $f\in C(G)$. Все функционалы, соответствующие мерам из $S(G)$, образуют, очевидно, замкнутое подмножество единичной сферы в $\overline{C}(G)$. Из бикомпактности единичной сферы сопряженного банахова пространства в слабой топологии вытекает, что $S(G)$ в слабой топологии образует бикомпактное хаусдорфово пространство.

В качестве операции умножения в $S(G)$ вводится операция свертки мер. Поэтому впредь мы будем просто говорить о произведении мер μ и ν и обозначать его $\mu\nu$. Очевидно, произведение мер $\mu\nu$ определяется следующим соотношением:

$$\int f(x)\,d\mu\nu(x)=\int\int f(yz)\,d\mu(y)\,d\nu(z),\quad f\in C(G). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что введенная операция умножения ассоциативна и непрерывна в заданной топологии. Таким образом, $S(G)$ есть хаусдорфова бикомпактная полугруппа.

1.3. **Носители мер.** Для любой меры $\mu\in S(G)$ существует единственное замкнутое множество $A\subset G$ такое, что $\mu(A)=1$ и $\mu(V)>0$ для любого его непустого открытого подмножества V. Подробнее об этом будет сказано в § 6. Полученное множество A обладает тем свойством, что оно является наименьшим замкнутым множеством, мера μ которого равна единице. Будем называть его *носителем* меры μ и обозначать $\omega(\mu)$.

1.3.1. **Лемма 1.** *Если $\mu\nu$ есть произведение мер μ и ν из $S(G)$, то* $\omega(\mu\nu)=\omega(\mu)\cdot\omega(\nu)$.

Мы не приводим здесь доказательства, так как в § 6 этот факт будет доказан при более общих предположениях (именно, когда G есть бикомпактная полугруппа).

1.3.2. Если для $\mu\in S(G)$ носитель $\omega(\mu)$ состоит из одного элемента $x\in G$, то будем говорить, что μ есть *точечная масса*, сосредоточенная в элементе x.

Соответствующий функционал, очевидно, переводит каждую функцию $f \in C(G)$ в число $f(x)$. Если каждому элементу группы G поставить в соответствие точечную массу, сосредоточенную в нем, то полученное отображение группы G в $S(G)$, как легко видеть (см. [26]), является гомеоморфным изоморфизмом. Поэтому мы можем считать, что G вложено в $S(G)$, и будем обозначать точечную массу в элементе $x \in G$ той же буквой. Справедливость следующих соотношений не вызовет сомнений:

$$\mu x(E) = \mu(Ex^{-1}), \quad x\mu(E) = \mu(x^{-1}E). \tag{1.4}$$

Отсюда непосредственно следует, что единица группы G является также единицей и в $S(G)$.

1.3.3. Очевидным следствием леммы 1 является следующее утверждение: для того, чтобы $\mu \in S(G)$ имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы μ была точечной массой. Действительно, если $\mu\nu = e$, где e есть точечная масса в единице группы G, то $\omega(\mu)\omega(\nu) = \{e\}$. Отсюда следует, что $\omega(\mu)$ и $\omega(\nu)$ — одноточечные подмножества G.

1.4. Идемпотенты в S(G). Элемент μ полугруппы называется идемпотентом, если $\mu^2 = \mu$. Пусть H — бикомпактная подгруппа группы G и μ — нормированная мера Хаара на H. Ее можно продолжить на всю группу G, полагая $\mu(E) = \mu(E \cap H)$ для любого борелевского множества E. Легко показать, что продолженная таким образом мера μ, принадлежащая теперь уже $S(G)$, является идемпотентом в полугруппе $S(G)$ (см. [26]). Справедливо и обратное утверждение. Прежде всего имеет место

Лемма 2. *Если мера μ является идемпотентом в $S(G)$, то $\omega(\mu)$ есть бикомпактная подгруппа G.*

Доказательство. По лемме 1, имеем $\omega(\mu)\omega(\mu) = \omega(\mu)$. В [8] доказано, что если некоторая бикомпактная полугруппа H имеет единственный идемпотент и $H^2 = H$, то H есть топологическая группа. Так как $\omega(\mu)$ удовлетворяет всем перечисленным требованиям, то $\omega(\mu)$ есть группа, что и требовалось доказать.

Окончательно, в [26] доказана

Теорема 1. *Если мера $\mu \in S(G)$ является идемпотентом, то μ есть мера Хаара на подгруппе $\omega(\mu)$, продолженная на всю группу G.*

1.5. Экстремальные точки S(G). Отметим одну специфическую особенность полугруппы $S(G)$. Именно, как легко видеть, наряду с любыми двумя элементами μ и ν множество $S(G)$ содержит также все элементы вида $t\mu + (1-t)\nu$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Иначе говоря, множество $S(G)$ выпукло. Меры, соответствующие экстремальным точкам выпуклого множества $S(G)$, будем называть *неразложимыми*. Таким образом, мера $\mu \in S(G)$ неразложима, если ее нельзя представить в виде линейной комбинации

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2,$$

где μ_1 и μ_2 отличны от μ.

Множество $S(G)$ содержит все конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i, \tag{1.5}$$

где μ_i — неразложимые меры, а λ_i — неотрицательные числа, такие, что

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. По теореме Крейна и Мильмана [9] получаем, что $S(G)$ совпадает с совокупностью всех предельных точек множества всех линейных комбинаций вида (1.5). Таким образом, получена теорема аппроксимации: *всякую меру $\mu \in S(G)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать в смысле слабой сходимости конечными линейными комбинациями неразложимых мер.*

Этот процесс приближения мер линейными комбинациями вида (1.5) сводится, как показывает следующая лемма, к построению интеграла на группе.

Лемма 3. *Для того, чтобы мера μ была неразложима, необходимо и достаточно, чтобы она была точечной массой.*

Доказательство. Очевидно, точечные массы являются неразложимыми мерами. Докажем необходимость. Пусть мера μ неразложима. Тогда $\omega(\mu)$ нельзя представить в виде суммы непересекающихся измеримых множеств положительной μ-меры. Действительно, предположим, что такое разложение есть, т. е. что $\omega(\mu) = H_1 \cup H_2$, где H_1 и H_2 есть измеримые непересекающиеся множества, а

$$\mu(H_1) = \lambda_1 > 0, \ \mu(H_2) = \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Построим тогда меру $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}\mu$, определенную на H_1, и меру $\mu_2 = \frac{1}{\lambda_2}\mu$, определенную на H_2. Тогда $\mu_1, \mu_2 \in S(G)$ и $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2$, что противоречит условию неразложимости μ. Из этих рассуждений непосредственно следует, что при наших условиях все измеримые множества имеют меру μ либо 0, либо 1. Теперь уже без труда доказывается, что в G существует, и притом единственная, точка x, любая окрестность которой имеет μ-меру 1. Тогда, по определению, мера μ и есть точечная масса, сосредоточенная в элементе x.

§ 2. О хаусдорфовых бикомпактных полугруппах

2.1. В данном параграфе будут приведены необходимые факты из теории бикомпактных хаусдорфовых полугрупп. В изложении материала мы следуем работе Шт. Шварца [17], в которой читатель сможет найти подробные доказательства всех предложений, о которых будет рассказано ниже.

2.2. Основная теорема. Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Возьмем произвольный элемент a из S и составим множество всех его степеней: $A = \{a, a^2, \ldots\}$. Наряду с множеством A рассмотрим «обрезанные» множества $A_n = \{a^n, a^{n+1}, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если мы возьмем замыкания $\bar{A}_n$ этих множеств, то они образуют очевидно, центрированную систему замкнутых множеств в бикомпактном пространстве. Поэтому пересечение

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

непусто. Так как каждое A_n есть полугруппа, то и замыкание $\bar{A}_n$ будет полугруппой. По этой причине и их пересечение D будет замкнутой полугруппой и, как легко видеть, к тому же коммутативной. Более того, К. Нумакура показал [11] (см. также [17]), что множество D есть группа. Таким образом, приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Для $a \in S$ положим $A = \{a, a^2, \ldots\}$. Тогда замыкание этого множества $\overline{A}$ содержит в виде подмножества некоторую замкнутую коммутативную группу D.*

2.2.1. Из этой теоремы, в частности, следует, что каждая хаусдорфова бикомпактная полугруппа содержит хоть один идемпотент. Таковым, очевидно, является единица группы D.

2.3. Понятие принадлежности к идемпотенту. В предыдущем пункте мы выяснили, что замыкание множества $A = \{a, a^2, \ldots\}$ содержит некоторый идемпотент полугруппы S. Можно, однако, показать (см. [17]), что замыкание $\overline{A}$ содержит только один идемпотент. В связи с этим каждый элемент $a \in S$ характеризуется в некоторой степени вполне определенным идемпотентом из S. Уточним сказанное, введя следующее определение: будем говорить, что элемент $a \in S$ *принадлежит к идемпотенту* e_α, если e_α является единственным идемпотентом полугруппы $\overline{A} = \overline{\{a, a^2, \ldots\}}$.

Каждый элемент $a \in S$ принадлежит, очевидно, к некоторому вполне определенному идемпотенту.

2.3.1. Пусть e_α — идемпотент полугруппы S. Символом K_α будем обозначать множество всех элементов из S, принадлежащих к e_α. Каковы свойства множества K_α при ближайшем рассмотрении? Очевидно, что если $a \in K_\alpha$, то и любая степень $a^n \in K_\alpha$. Таким образом, $A \subseteq K_\alpha$. По непрерывности этот результат переносится и на замыкание множества A: $\overline{A} \subseteq K_\alpha$.

2.3.2. Пусть $a \in S$ принадлежит к идемпотенту e_1, а $b \in S$ — к идемпотенту e_2. Возникает естественный вопрос: к какому идемпотенту принадлежит произведение ab? В коммутативном случае ответом служит следующая

Лемма 4. *Пусть S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть $a \in S$ принадлежит к идемпотенту e_1, а $b \in S$ — к идемпотенту e_2. Тогда элемент ab принадлежит к идемпотенту $e_1 e_2$.*

2.4. Максимальные группы в S. Каждый идемпотент в S является основой для существования в S группы, в которой данный идемпотент играет роль единицы. Очевидно возможно существование большого числа групп, содержащих данный идемпотент e_α. Среди них выделим в некотором роде максимальные. Нашу мысль уточняет следующее определение. Группа D_α в S называется *максимальной группой, принадлежащей к идемпотенту* e_α, если выполнены условия:

а) группа D_α содержит идемпотент e_α;

б) не существует другой группы D' в S, которая содержала бы D_α в качестве истинного подмножества.

Используя лемму Цорна, легко убедиться, что существует хотя бы одна максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e_α. Это утверждение усиливает следующая теорема (см. [17]).

Теорема 3. *Пусть e_α — идемпотент из S. Тогда существует только одна максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e_α. Каждая максимальная группа замкнута.*

2.4.1. Следствие. *Имеет место $D_\alpha \subseteq K_\alpha$.*

2.4.2. Лемма 5. *Пусть $a \in S$ и e_0 единственный идемпотент, содержащийся в $\overline{A} = \overline{\{a, a^2, \ldots\}}$. Пусть D — максимальная группа, содержащаяся в A. Тогда $\overline{A} e_0 = e_0 \overline{A} = D$.*

2.5. **Регулярные элементы в S.** Пусть элемент $a \in S$ принадлежит к идемпотенту e_α. В этом случае мы назовем a *регулярным элементом*, если только $ae_\alpha = a$. Как следует из леммы 5, для того, чтобы элемент $a \in S$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{A}$ было группой.

Непосредственным следствием вышесказанного является утверждение, что регулярный элемент удовлетворяет также соотношению

$$e_\alpha a = a.$$

2.5.1. Если мы рассмотрим множество K_α всех принадлежащих к идемпотенту e_α элементов, то, конечно, будет интересно как-нибудь охарактеризовать все регулярные элементы этого множества. С одной стороны, максимальная группа D_α, принадлежащая к идемпотенту e_α, состоит из регулярных элементов. Вместе с тем, оказывается, справедливо и обратное утверждение. Полный ответ на интересующий нас вопрос дает следующая

Лемма 6. *Максимальная группа D_α, принадлежащая к идемпотенту e_α, состоит из тех элементов K_α, которые являются регулярными, и только из таких элементов.*

Следствие. *Для максимальной группы D_α справедливо соотношение*

$$D_\alpha = K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha.$$

§ 3. Композиции независимых одинаково распределенных случайных величин на бикомпактной группе

3.1. **Предельная теорема.** Назовем закон распределения μ на бикомпактной группе G устойчивым, если μ является в полугруппе мер $S(G)$ идемпотентным элементом. Для устойчивого закона, таким образом, выполняется соотношение $\mu^2 = \mu$. В § 1 мы установили, что для того, чтобы закон распределения μ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mu)$ было бикомпактной подгруппой G, а сама мера μ являлась инвариантной мерой Хаара этой подгруппы.

Условимся в дальнейшем говорить, что случайная величина ξ с распределением μ является предельной для композиций независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с распределениями $\mu_1, \mu_2, \ldots$, если в слабой топологии $\mu = \lim \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$ при $n \to \infty$.

Пусть дана последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Пусть a — мера, задающая распределение каждой из этих величин. Первым шагом в исследовании асимптотического поведения композиций случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ является следующая

Теорема 4. *Если предел композиций одинаково распределенных независимых случайных величин существует, то предельный закон устойчив. Наоборот, всякий устойчивый закон является предельным в этом смысле.*

Доказательство. Итак, имеем, что для данного $a \in S(G)$ последовательность

$$a, a^2, a^3, \ldots \tag{3.1}$$

сходится. Пусть элемент a принадлежит к идемпотенту e_α, а μ — предельный для последовательности (3.1) закон распределения. Докажем, что тогда $\mu = e_\alpha$.

Предположим, что $\mu \neq e_\alpha$. Так как топологическое пространство $S(G)$

хаусдорфово, то найдутся непересекающиеся окрестности $v(\mu)$ и $v(e_\alpha)$ элементов μ и e_α. Для некоторого натурального числа n имеем $v(\mu) \supseteq A_n = \{a^n, a^{n+1}\}$. Но $e_\alpha \in \overline{A}_n$, поэтому для некоторого k будет $a^{n+k} \in v(e_\alpha)$, т. е. окрестности $v(\mu)$ и $v(e_\alpha)$ имеют общий элемент, что противоречит предположению.

Для доказательства второй части теоремы достаточно для заданного устойчивого закона e_α взять в (3.1) в качестве a сам закон e_α.

3.2. **Регулярные элементы в полугруппе $S(G)$.** Чтобы выяснить, при каких условиях последовательность мер (3.1) сходится, необходимо более подробно проанализировать структуру полугруппы $S(G)$, в частности, изучить свойства регулярных элементов. Этим мы сейчас и займемся.

Лемма 7. *Если $a \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α и является регулярным элементом, то $\omega(a)$ есть двусторонний класс смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\omega(a) \cap \omega(e_\alpha) = \emptyset$ (пустое множество). Из соотношения $ae_\alpha = a$ следует, что $\omega(a) \cdot \omega(e_\alpha) = \omega(a)$, и $\omega(a)$ не может содержаться в $\omega(e_\alpha)$. Остаются две возможности: либо $\omega(a)$ пересекает $\omega(e_\alpha)$, либо расположено вне $\omega(e_\alpha)$. Рассмотрим первый случай. Так как $a \in D_\alpha$, то найдется элемент b из D_α такой, что $ab = e_\alpha$. Отсюда вытекает, что наш случай невозможен. Остается поэтому только вторая возможность: $\omega(a)$ расположено вне $\omega(e_\alpha)$.

Соотношение $ae_\alpha = e_\alpha a = a$ указывает на то обстоятельство, что $\omega(a)$ состоит из нескольких правых классов смежности и одновременно из нескольких левых классов смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$. Покажем, что $\omega(a)$ состоит ровно из одного левого класса смежности G по $\omega(e_\alpha)$. Предположим противное, — что $\omega(a)$ состоит по крайней мере из двух левых классов смежности xH и yH, где $H = \omega(e_\alpha)$. Так как a — элемент группы D_α (в силу регулярности), то найдется такой элемент $b \in D_\alpha$, что $ba = ab = e_\alpha$. Пусть в $\omega(b)$ входит правый класс смежности H_z. Тогда должно быть $HzxH \subseteq H$ и $Hz \cdot yH \subseteq H$. Отсюда $zx = h_1$, $h_1 \in H$, и $z = h_1 x^{-1}$, т. е. $Hz = Hx^{-1}$. Но тогда уже $Hx^{-1}yH \subseteq H$ и $x^{-1}y = h_2$, $h_2 \in H$, что противоречит предположению, что xH и yH — два разных класса смежности.

Аналогично доказывается, что $\omega(a)$ представляет собой ровно один правый класс смежности. Следовательно, $\omega(a)$ есть правый класс смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$ и в то же время левый класс смежности G по той же подгруппе. Итак, $\omega(a) = xH = Hy$, но так как у нас $y \in \omega(a)$, то $y = xh$, $h \in H$, и поэтому $x = yh^{-1}$, т. е. $yH = Hy$.

3.2.1. В п. 2.5.1 было установлено, что $K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = D_\alpha$. Из этого соотношения и из леммы 7 непосредственно следует, что если $a \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α, то $\omega(a)$ содержится в некотором двустороннем классе смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$.

3.2.2. Мы получили, по лемме 7, что все носители мер, являющихся регулярными элементами в полугруппе $S(G)$, принадлежащими к идемпотенту e_α, образуют группу двусторонних классов смежности по подгруппе $\omega(e_\alpha)$ с единицей $H = \omega(e_\alpha)$. Группа этих классов смежности, очевидно, входит в нормализатор подгруппы H. Мы докажем, что, более того, носители всех регулярных элементов, принадлежащих к идемпотенту e_α, заполняют весь нормализатор подгруппы $H = \omega(e_\alpha)$.

Прежде всего, поскольку каждый идемпотент e_α есть инвариантная мера Хаара на замкнутой подгруппе $\omega(e_\alpha)$, то следует ожидать и некоторых свойств инвариантности от регулярных элементов $S(G)$, принадлежащих к идемпотенту e_α.

Введем следующее понятие. Под *инвариантной мерой Хаара на двустороннем классе смежности* бикомпактной группы G по подгруппе H мы будем понимать меру μ, обладающую следующими свойствами: а) мера любого открытого подмножества этого класса смежности не равна нулю; б) $\mu(E) = \mu(xE) = \mu(Ex)$ для любого измеримого множества E из данного класса смежности, причем сдвинутые множества xE и Ex должны находиться в пределах класса смежности. Для последнего, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $x \in H$.

Итак, пусть e_α — идемпотент в $S(G)$, $H = \omega(e_\alpha)$, а $\mathfrak{S}(H)$ есть нормализатор подгруппы H в группе G. Имеет место

Теорема 5. *Если элемент $\mu \in S(G)$, принадлежащий к идемпотенту e_α, регулярен, то μ есть инвариантная мера Хаара на $\omega(\mu)$. Наоборот, на любом смежном классе $\mathfrak{S}(H)$ по подгруппе $H = \omega(e_\alpha)$ существует инвариантная мера Хаара, являющаяся регулярным элементом в $S(G)$, принадлежащим к идемпотенту e_α.*

Доказательство. Пусть $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α и является регулярным элементом. Покажем, что мера μ инвариантна на $\omega(\mu)$, т. е. на двустороннем классе смежности G по подгруппе $H = \omega(e_\alpha)$. Это значит, что нужно проверить справедливость соотношений

$$\mu h = h\mu = \mu$$

для всех $h \in H$. В силу регулярности элемента μ имеем:

$$\mu h = \mu e_\alpha h = \mu e_\alpha = \mu,$$

$$h\mu = h e_\alpha \mu = e_\alpha \mu = \mu.$$

Таким образом, инвариантность меры μ доказана.

Перейдем ко второй части теоремы. Рассмотрим какой-нибудь класс смежности $\mathfrak{S}(H)$ по подгруппе H, скажем, $x_0 H$. Возьмем меру $\nu = x_0 e_\alpha$. Ее носитель есть $\omega(x_0 e_\alpha) = x_0 H$, значит, она сосредоточена на рассматриваемом двустороннем классе смежности $x_0 H$. Из п. 3.2.1 следует, что ν принадлежит либо к идемпотенту e_α, либо к какому-либо идемпотенту e_0, для которого $\omega(e_\alpha) \subset \omega(e_0)$. Но, как выяснится в дальнейшем, элемент ν принадлежит к идемпотенту e_0 в том случае, когда $\omega(\nu)$ расположено в двустороннем классе смежности G по подгруппе $\omega(e_0)$, причем подгруппа $\omega(e_0)$ минимальна в этом смысле. Но поскольку $\omega(\nu)$ уже расположено в двустороннем классе смежности по подгруппе $\omega(e_\alpha)$, то ν и принадлежит к идемпотенту e_α.

С другой стороны, ν является регулярным элементом, поскольку $\nu e_\alpha = x_0 e_\alpha e_\alpha = x_0 e_\alpha = \nu$. Значит, $\nu e_\alpha = e_\alpha \nu = \nu$, и ν является инвариантной мерой на $\omega(\nu) = x_0 H$, что и тр. доказать.

3.3. Условия сходимости последовательности (3.1). В теореме 4 мы выяснили, что если последовательность (3.1) сходится, то предельный закон устойчив. Пусть $a \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α. Теперь мы

изучим, при каких условиях последовательность (3.1) степеней элемента a будет сходиться к устойчивому закону e_α.

3.3.1. Лемма 8. *Для того, чтобы последовательность (3.1) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы множество* $\overline{A} = \overline{\{a, a^2, \ldots\}}$ *не содержало подгруппы, отличной от* e_α *(т. е. чтобы* $D = e_\alpha$*).*

Доказательство. Если последовательность (3.1) сходится, то она сходится только к e_α. Тогда, если $D \neq e_\alpha$, существует регулярный элемент $\mu \neq e_\alpha$ из D, так что $\mu e_\alpha = \mu$. Отсюда, рассматривая соответствующие окрестности элементов μ и e_α, немедленно получаем, что элемент μ тоже является предельным для последовательности (3.1), чего не может быть в силу хаусдорфовости топологического пространства $S(G)$.

Достаточность условия совершенно очевидна.

3.3.2. Из соотношения (лемма 5)

$$\overline{A}e_\alpha = e_\alpha\overline{A} = D \tag{3.2}$$

следует, что если для элемента $a \in S(G)$, принадлежащего к идемпотенту e_α, $\omega(a)$ не содержится в $\omega(e_\alpha)$, то $\overline{A} = \overline{\{a, a^2, \ldots\}}$ обязательно содержит группу $D \neq e_\alpha$. А теперь, в свою очередь, докажем, что если элемент $a \in S(G)$ обладает тем свойством, что $\omega(a) \subseteq \omega(e_\alpha)$, то все элементы из множества $\overline{A}$ обладают этим свойством. Мы докажем даже более общее утверждение:

Лемма 9. *Пусть задано семейство законов распределения* $M = \{\mu_\tau;$ $\mu_\tau \in S(G), \tau \in T)$, *сосредоточенных на замкнутом множестве* $B \subseteq G$ *(т. е.* $\omega(\mu_\tau) \subseteq B$*) и пусть* $\mu \in \overline{M}$. *Тогда* $\omega(\mu) \subseteq B$.

Доказательство (от противного). Пусть $E = \omega(\mu) - B$ и $\mu(E) = \delta > 0$. В силу регулярности меры μ, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое замкнутое множество C, содержащееся в измеримом множестве E, что $\mu(C) > \mu(E) - \varepsilon = \delta - \varepsilon$. Выбираем ε таким, чтобы $\delta - \varepsilon > 0$. По лемме Урысона, можно построить непрерывную функцию f, равную нулю на множестве B и единице на множестве C. Проверяя предельные соотношения для этой функции, приходим к желаемому противоречию.

Из леммы 9 и соотношения (3.2) следует, что если для элемента $a \in S(G)$, принадлежащего к идемпотенту e_α, $\omega(a) \subseteq \omega(e_\alpha)$, то $D = e_\alpha$. В итоге мы, доказали следующее предложение:

Теорема 6. *Пусть* $a \in S(G)$ *принадлежит к идемпотенту* e_α. *Для того, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = e_\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega(a)$ *не содержалось ни в каком классе смежности* G *по подгруппе* $\omega(e_\alpha)$, *отличном от этой подгруппы.*

3.3.3. К. Урбаник в своей работе [22] указал другой необходимый и достаточный признак для сходимости последовательности мер (3.1). Условимся обозначать $[E]$ наименьшую замкнутую подгруппу G, содержащую данное множество E. По Урбанику, для сходимости последовательности (3.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$[\omega(a)] = [\omega(a) \cdot \omega(a)^{-1}]. \tag{3.3}$$

Действительно, пусть $a \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α. В этом случае $\omega(a)$ расположено в некотором двустороннем классе смежности G по

$\omega(e_\alpha)$: $\omega(a) \subseteq x \cdot \omega(e_\alpha)$. Тогда $\omega(a)^{-1} \subseteq x^{-1} \cdot \omega(e_\alpha)$ и $[\omega(a) \cdot \omega(a)^{-1}] \subseteq \omega(e_\alpha)$, в то время, как $\omega(e_\alpha) \subseteq [\omega(a)]$. Следовательно, $\omega(a) \subset \omega(e_\alpha)$, и по теореме 6 имеем сходимость.

Если же последовательность (3.1) сходится, то по теореме 6 $\omega(a) \subseteq \omega(e_\alpha)$ и, очевидно, $[\omega(a)] = \omega(e_\alpha)$. Предположим, что $[\omega(a) \cdot \omega(a)^{-1}] = H \subset \omega(e_\alpha)$. Если найдется $h \in H$ такой, что одновременно будет $h \in \omega(a)$, то для любого $x \in \omega(e_\alpha) - H$ элемент xh^{-1} уже не принадлежит H, значит этот случай отбрасываем. Следовательно, $\omega(a)$ расположено в $\omega(e_\alpha)$ вне H. Так как для любых x_1, $x_2 \in \omega(a)$ выполняется $x_2 x_1^{-1} = h$, $h \in H$, то $x_2 = hx_1$ и $\omega(a)$ расположено в одном правом классе смежности Hx_1. Как известно (см. [6], теорема 8), группа H инвариантна в $\omega(e_\alpha)$, и поэтому $Hx_1 = x_1 H$. В таком случае (см. п. 4.2) a принадлежит к идемпотенту e_H — инвариантной мере группы H, что противоречит предположению, что a принадлежит к идемпотенту e_α.

§ 4. Предельные теоремы

4.1. Основная теорема для композиций одинаково распределенных случайных величин. В общем случае, как мы видели, сходимость композиций независимых одинаково распределенных случайных величин не всегда имеет место. Однако, оказывается, можно так «нормировать» эти композиции, что они уже будут сходиться, причем опять же к устойчивому закону. Например, если группа G коммутативна, то для любой меры $\mu \in S(G)$ можно найти множитель x_0 такой, что последовательность

$$\mu x_0,\ \mu^2 x_0^2, \ldots$$

сходится к устойчивому закону. При этом x_0 есть точечная масса. Действительно, пусть μ принадлежит к идемпотенту e_α и пусть $\omega(\mu)$ не содержится в $\omega(e_\alpha)$. Как мы знаем, в этом случае $\omega(\mu)$ расположено в каком-то классе смежности $x \cdot \omega(e_\alpha)$. Если взять меру μx^{-1}, то она, как элемент $S(G)$, будет принадлежать к идемпотенту e_α (лемма 4), а $\omega(\mu x^{-1}) \subseteq \omega(e_\alpha)$. Последовательность ее степеней теперь уже будет сходиться к e_α. Здесь роль x_0 играет элемент x^{-1}.

Подобное утверждение верно, оказывается, и в общем, некоммутативном случае. Пусть элемент $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту e_α, причем известно, что $\mu e_\alpha \neq e_\alpha$. В этом случае, очевидно, $\omega(\mu)$ расположено в каком-нибудь двустороннем классе смежности G по подгруппе $H = \omega(e_\alpha)$:

$$\omega(\mu) \subseteq xH = Hx,\ x \in G.$$

Будем «проектировать» меру μ на подгруппу H, т. е. просто сдвигать ее в H, свертывая с точечными массами. Одной из таких «проекций», в частности, будет мера μx^{-1}. Если же рассмотреть последовательность

$$\mu,\ \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots, \tag{4.1}$$

то в качестве соответствующих «проекций» на подгруппу H можно взять меры

$$\mu x^{-1},\ \mu^2 x^{-2}, \ldots, \mu^n x^{-n}, \ldots \tag{4.2}$$

Теорема 7. *Последовательность мер (4.2) сходится к инвариантной мере* e_α.

Составим множества $N_1 = \{\mu x^{-1}, \mu^2 x^{-2}, \ldots\}$, $N_2 = \{\mu^2 x^{-2}, \mu^3 x^{-3}, \ldots\}, \ldots$ Возьмем пересечение замкнутых множеств $\overline{N}^k$:

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{N}_k.$$

Если мы покажем, что множество N состоит из одного элемента, а именно, из e_α, то наша цель будет достигнута. При этом нам поможет следующая

Лемма 10. *Пусть S — бикомпактная полугруппа. Пусть $A = \{a_\lambda;\ a_\lambda \in S,\ \lambda \in \Lambda\}$, $B = \{b_\lambda;\ b_\lambda \in S,\ \lambda \in \Lambda\}$ — подмножества S, чьи элементы соответствуют одной и той же системе индексов Λ. Составим множество $C = \{a_\lambda b_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Тогда для любого $c \in \overline{C}$ найдутся такие элементы $a \in \overline{A}$ и $b \in B$, что $c = ab$.*

Доказательство леммы. Обозначим $\Sigma_c = \{V_\tau(c),\ \tau \in T\}$ полную систему окрестностей элемента $c \in \overline{C}$. Положим $C_\tau = V_\tau(C) \cap C$. Обозначим A_τ множество элементов из A, чьи индексы имеют те же значения, что и индексы элементов C_τ. Тогда семейство множеств A_τ обладает свойством конечного пересечения. В самом деле, пусть $A_{\tau_1}, \ldots, A_{\tau_n}$ некоторое конечное число таких множеств, а C_{τ_i}; $i = 1, \ldots, n$, суть соответствующие подмножества C. Тогда существует такая окрестность $V_m(c) \in \Sigma_c$, $m \in T$ элемента c, что $V_m(c) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{\tau_i}(c)$. Пусть $C_m = V_m(c) \cap C$ и обозначим A_m подмножество A, соответствующее C_m. Ясно, что $A_m \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\tau_i}$.

Итак, семейство замкнутых множеств $\overline{A}_\tau$ есть центрированная система в бикомпактном пространстве, поэтому пересечение $\bigcap_\tau \overline{A}_\tau$ непусто. Возьмем тогда какой-нибудь элемент

$$a \in \bigcap_{\tau \in T} \overline{A}_\tau.$$

Обозначим теперь $\Sigma_a = \{V_\gamma(a),\ \gamma \in \Gamma\}$ полную систему окрестностей элемента a. Положим $A_{\gamma\tau} = V_\gamma(a) \cap A_\tau$. Обозначим $B_{\gamma\tau}$ множество элементов из B, чьи элементы имеют те же индексы, что и элементы $A_{\gamma\tau}$. Очевидно пересечение

$$\bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \tau \in T}} \overline{B}_{\gamma\tau}$$

непусто. Тогда возьмем некоторый элемент b, принадлежащий этому пересечению, и докажем, что $ab = c$. Действительно если бы это было не так, то у элементов ab и c существовали непересекающиеся окрестности $V(ab)$ и $V_{\tau_0}(c)$. Из непрерывности операции умножения следует, что найдутся такие окрестности $V_{\gamma_0}(a)$ и $V(b)$ элементов a и b, что

$$V_{\gamma_0}(a) \cdot V(b) \subset V(ab).$$

Так как $b \in \overline{B}_{\gamma_0\tau_0}$, то $V(b) \cap B_{\gamma_0\tau_0}$ непусто. Пусть b_{λ_0} есть некоторый элемент из $V(b) \cap B_{\gamma_0\tau_0}$. Тогда, так как $A_{\gamma_0\tau_0}\ \gamma_0 \subset V_{\gamma_0}(a)$, в $V_{\gamma_0}(a)$ найдется элемент a_{λ_0} с тем же индексом. Следовательно $a_{\lambda_0} b_{\lambda_0} \in V_{\gamma_0}(a) V(b) \subset V(ab)$.

Но $a_{\lambda_0} \in A_{\tau_0}$, элементы которого имеют те же индексы, что и $C_{\tau_0} \subset V_{\tau_0}(c)$. Значит, $a_{\lambda_0} b_{\lambda_0} \in V_{\tau_0}(c)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Применим доказанную лемму к нашему случаю, когда $A = \{\mu^n;\ n = 1,2,\ldots\}$, $B = \{x^{-n}\ \ n = 1,2,\ldots\}$, $C = \{\mu^n x^{-n};\ n = 1,2,\ldots\}$. Возьмем $c \in N$. Так как $c \in \overline{C}$, то из леммы 10 следует, что найдутся такие $a \in \overline{A}$ и $b \in \overline{B}$, что $c = ab$. Из доказательства леммы можно проследить, что

$$a \in \overline{A}_k = \overline{\{\mu^n;\ \ n = k,\ \ k+1,\ldots\}}$$

для всех $k = n_0,\ n_0 + 1, \ldots$, т. е. $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k$. Значит, $a \in D_\alpha$. Тогда (теорема 5) a есть инвариантная мера Хаара на двустороннем классе смежности G по подгруппе $\omega(e_\alpha)$, а так как должно быть $\omega(c) \subseteq \omega(e_\alpha)$, то $ab = e_\alpha$. Следовательно, множество N состоит всего из одного элемента e_α. Это утверждение полностью доказывает теорему.

4.2. Классификация вероятностных мер на группе G. Мы теперь имеем возможность по-новому истолковать определение принадлежности элемента полугруппы $S(G)$ к идемпотенту. Возьмем любую меру $\mu \in S(G)$ и найдем наименьшую подгруппу группы G, обладающую тем свойством, что $\omega(\mu)$ расположено в двустороннем классе смежности G по этой подгруппе. Если e_0 инвариантная мера Хаара такой подгруппы, то оказывается, что μ принадлежит к идемпотенту e_0. В самом деле, достаточно взять проекции мер $\mu^n;\ n = 1,2,\ldots$, на полученную подгруппу и применить теорему 7.

4.3. Разбиение S(G) на классы. Будем говорить, что меры $\mu_1,\ \mu_2 \in S(G)$ *принадлежат к одному типу*, если для некоторого $x \in G$ имеет место равенство

$$\mu_1 = \mu_2 x,$$

или, что то же самое, равенство

$$\mu_2 = \mu_1 x^{-1}.$$

Принадлежность к тому или иному типу есть свойство симметричное и транзитивное, поэтому полугруппа $S(G)$ разбивается на непересекающиеся между собой типы.

Теорема 8. *Если $\mu_1,\ \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ есть последовательность элементов из $S(G)$, сходящаяся к μ, то при любом подборе $x_n \in G$; $n = 1,2,\ldots$, последовательность*

$$\mu_1 x_1,\ \mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n, \ldots \qquad (4.3)$$

может сходиться только к мере $\nu \in S(G)$ того же типа, что и μ.

Доказательство. Составим множества $X_1 = \{x_1,\ x_2, \ldots\}$, $X_2 = \{x_2,\ x_3, \ldots\}, \ldots$ и возьмем пересечение

$$X = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{X}_k.$$

Это множество, очевидно, непусто. Возьмем тогда какой-нибудь элемент $x_0 \in X$. Ясно, что μx_0 будет предельным элементом для последовательности (4.3), поэтому он должен совпадать с ν.

4.3.1. Непосредственным следствием из теорем 7 и 8 является следующее утверждение: *если при некоторых* $x_n \in G$; $n = 1, 2, \ldots$, *последовательность*

$$\mu x_1, \ \mu^2 x_2, \ \ldots, \ \mu^n x_n, \ \ldots$$

сходится, то предельный элемент есть инвариантная мера на некотором классе смежности G по некоторой бикомпактной подгруппе (а именно — по подгруппе $\omega(e_\alpha)$, где e_α есть тот идемпотент, к которому принадлежит элемент μ).

4.4. Аппроксимация сепарабельными группами. Во многих случаях гораздо легче, по естественным причинам, оперировать с бикомпактными группами, допускающими аксиому счетности, чем с произвольными бикомпактными группами (как известно, в этом случае наличие первой аксиомы счетности означает вместе с тем выполнение и второй аксиомы счетности). Но нам, конечно, важно иметь результаты, действительные для произвольных групп. Оказывается, часто можно переходить от групп с аксиомой счетности к группам, у которых наличие аксиомы счетности не предполагается. Подобную редукцию можно совершить, пользуясь теоремой Л. Грабарь [3], утверждающей, что в любой окрестности единицы бикомпактной группы существует нормальный делитель, фактор-группа по которому имеет пространство со счетным базисом. С ее помощью мы перенесем ряд теорем К. Ито и У. Кавада, доказанных ими для сепарабельных групп (см. [6]), на произвольные бикомпактные группы.

Займемся обоснованием этого метода.

Пусть H есть нормальный делитель бикомпактной группы G, а π есть проекция группы G на фактор-группу $G' = G/H$. Как известно, π есть непрерывное открытое отображение, являющееся в то же время измеримым преобразованием [4]. Если на G задана мера ν, то на G' естественным образом индуцируется мера ν': для каждого измеримого множества $E' \subseteq G'$ полагаем

$$\nu'(E') = \nu[\pi^{-1}(E')].$$

Для дальнейшего заметим, что если непрерывная функция $F(x)$ постоянна на классах смежности G по подгруппе H, то

$$\int_G F(x)\, d\nu(x) = \int_{G'} F(x')\, d\nu'(x'),$$

где x — любой представитель класса смежности x', которому он принадлежит. Используя это обстоятельство, получаем:

$$(\nu_1\nu_2)(E') = (\nu_1\nu_2)[\pi^{-1}(E')] = \int_G \nu_1[\pi^{-1}(E')\, x^{-1}]\, d\nu_2(x) =$$

$$= \int_{G'} \nu_1[\pi^{-1}(E')(x')^{-1}]\, d\nu_2'(x') = \int_{G'} \nu_1'[E'(x')^{-1}]\, d\nu_2'(x').$$

Следовательно, мы доказали, что

$$(\nu_1\nu_2)' = \nu_1'\nu_2'. \tag{4.4}$$

Отсюда мы получаем основное необходимое нам соотношение, используемое в методе аппроксимации: пусть μ — инвариантная мера на подгруппе H, а $f \in C(G)$; имеем

$$\iint f(xy)\,d\nu^2(x)\,d\mu(y) = \int_G F(x)\,d\nu^2(x) = \int_{G'} F(x')\,d(\nu^2)'(x') = \int_{G'} F(x')\,d(\nu')^2(x'),$$

или в общем случае

$$\iint f(xy)\,d\nu^n(x)\,d\mu(y) = \int_{G'} F(x')\,d(\nu')^n(x'). \tag{4.5}$$

4.5. Обобщение результатов К. Ито и У. Кавада [6]. Как уже говорилось в п. 3.3.3, через $[E]$ мы обозначаем наименьшую замкнутую подгруппу G, содержащую множество E.

Имеем следующую эргодическую теорему.

Теорема 9. *Пусть мера $p \in S(G)$ такова, что $[\omega(p)] = G$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$, заданной на G, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f^{(1)}(s) + f^{(2)}(s) + \ldots + f^{(n)}(s)) = \int f(x)\,dm(x) \tag{4.6}$$

равномерно по $s \in G$. При этом $m \in S(G)$ есть инвариантная мера Хаара группы G, а $f^{(k)}(s)$ определяются индуктивно:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(s) &= \int f^{(k-1)}(sy)\,dp(y), \\ f^{(1)}(s) &= \int f(sy)\,dp(y). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Доказательство. Эта теорема доказана для сепарабельных групп в [6], поэтому мы применим теорему Л. Грабарь. Заметим прежде всего, что определенные в условии теоремы функции $f^{(k)}(s)$ равны

$$f^{(k)}(s) = \int f(sy)\,dp^k(y), \tag{4.8}$$

где p^k есть k-ая степень меры p в смысле операции свертки.

Если $f(x)$ — непрерывная функция на бикомпактной группе G, то она и равномерно непрерывна на ней. Пусть V — такая окрестность единицы, что если $x_1^{-1}x_2 \in V$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

где ε есть заданное положительное число. Найдем тогда нормальную подгруппу H, содержащуюся в окрестности V, фактор-группа G/H по которой имеет пространство со счетным базисом. Пусть μ — инвариантная мера Хаара подгруппы H. Составим функцию

$$F(x) = \int f(xy)\,d\mu(y).$$

Тогда имеем

$$F(x) - \varepsilon < f(x) < F(x) + \varepsilon, \tag{4.9}$$

так как

$$| F(x) - f(x) | \leqslant \int | f(xy) - f(x) | \, d\mu(y) < \varepsilon.$$

Теперь, по теореме Кавада — Ито, равномерно по $s \in G$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\int F(sx') \, dp'(x') + \ldots + \int F(sx') \, d(p')^n(x') \right) =$$

$$= \int F(x') \, dm'(x') = \int f(x) \, dm(x).$$

Обозначив

$$\frac{1}{n} \left(\int F(sx') \, dp'(x') + \ldots + \int F(sx') \, d(p')^n(x') \right) = K_n$$

и, принимая во внимание (4.9), получаем

$$K_n - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} (f^{(1)}(s) + \ldots + f^{(n)}(s)) \leqslant K_n + \varepsilon.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \int f(x) \, dm(x),$$

то для нижнего и верхнего пределов $\underline{M}$ и $\overline{M}$ последовательности

$$a_n = \frac{1}{n} (f^{(1)}(s) + \ldots + f^{(n)}(s))$$

имеем

$$\int f(x) \, dm(x) - \varepsilon \leqslant \underline{M} \leqslant \overline{M} \leqslant \int f(x) \, dm(x) + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε выполняется

$$\underline{M} = \overline{M} = \int f(x) \, dm(x),$$

что влечет утверждение теоремы.

Аналогичным приемом доказывается

Теорема 10. *Если $p \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту m, то равномерно по $s \in G$*

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(s) = \int f(x) \, dm(x). \tag{4.10}$$

4.5.1. К рассматриваемому циклу принадлежит и следующая предельная теорема, которая для сепарабельных групп доказана в [6]. Введем следующее определение. Мы скажем, что законы распределения $p_1, \ldots, p_n \in S(G)$ *взаимно коммутируют*, если $p_1 \ldots p_n = p_{i_1} \ldots p_{i_n}$ выполняется для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$.

Например, если группа G абелева или $p_1, \ldots, p_n$ есть один и тот же закон распределения, то имеем как раз совокупность взаимно коммутирующих законов.

Бесконечную последовательность законов распределения $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ назовем взаимно коммутирующей, если любая конечная совокупность ее элементов взаимно коммутирует. Имеет место следующая

Теорема 11. *Пусть G есть связная бикомпактная группа и на ней задана последовательность взаимно коммутирующих законов распределения $p_1, \ldots, p_n, \ldots$. Если существует пара положительных констант ε, η, независящих от n, и таких, что*

$$p_n(E) < 1 - \eta \tag{4.11}$$

выполняется для любого борелевского множества E, для которого $m(E) < \varepsilon$ (напоминаем, что m есть мера Хаара всей группы G), *то*

$$\lim_{n\to\infty} p_1 \ldots p_n = m.$$

Доказательство. Если обозначить

$$b_n = p_1 \ldots p_n,$$

то требуется доказать, что для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\, db_n(x) = \int f(x)\, dm(x). \tag{4.12}$$

Пусть подгруппа H и мера μ на ней имеют тот же смысл, что и в теореме 9. Тогда последовательность

$$p_1', \ldots, p_n', \ldots$$

индуцированных законов распределения на $G' = G / H$ удовлетворяет условию (4.11) и является взаимно коммутирующей. Теперь для непрерывной функции

$$F(x) = \int f(xy)\, d\mu(y)$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x')\, db_n'(x') = \int F(x')\, dm'(x') = \int f(x)\, dm(x).$$

Отсюда уже легко получить (4.12). Мы опускаем дальнейшие детали.

Замечание. Можно получить другие специальные случаи этой теоремы, если заменить предположение (4.11) условием, что p_n абсолютно непрерывны по отношению к m равномерно по n, или более сильным условием что

$$p_n(E) < \alpha \cdot m(E), \quad \alpha > 0; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

4.6. Общий принцип сходимости распределений на бикомпактных группах. Здесь мы рассмотрим случай неодинаково распределенных независимых случайных величин на бикомпактной группе G. Для композиций таких величин можно, оказывается, провести нормировку сдвигом при помощи не-

случайных констант, после чего будет уже иметь место сходимость. Таким образом, для неодинаково распределенных независимых случайных величин верна теорема, аналогичная теореме 7, причем, конечно, предельные законы здесь весьма разнообразны—всё зависит от составляющих законов распределения.

Теорема 12. *Пусть имеется последовательность независимых случайных еличин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. *Составим композиции*

$$\zeta_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_n.$$

Тогда найдутся такие неслучайные константы a_n, *что последовательность нормированных композиций*

$$\eta_n = \zeta_n \cdot a_n$$

имеет предельное распределение.

Доказательство. Чтобы не усложнять доказательства, мы предположим, что топологическое пространство группы G имеет счетный базис. В общем же случае теорему можно доказать прямым методом по аналогии с тем, как будем вести доказательство ниже.

Итак, пусть G — сепарабельная группа. В этом случае пространство $C(G)$ содержит счетное всюду плотное множество, и поэтому единичная сфера в сопряженном пространстве $\overline{C}(G)$ обладает свойством компактности. Следовательно, из любой бесконечной последовательности элементов из $S(G)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Пусть случайная величина ξ_k распределена по закону μ_k; $k = 1, 2, \ldots$. Тогда закон распределения величины ζ_n будет $\nu_n = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$. Рассмотрим предельные точки последовательности ν_n. Пусть среди них имеется по крайней мере два предельных элемента ν' и ν'', не равных друг другу. Выберем системы индексов $\{n_i'\}$ и $\{n_i''\}$, так чтобы

$$\nu_{n_i'} \to \nu' \quad \text{и} \quad \nu_{n_i''} \to \nu''.$$

Эти индексы выберем таким образом, чтобы $n_i' < n_i''$. Обозначим

$$\lambda_{n_i'} = \mu_{n_i'+1}\mu_{n_i'+2} \ldots \mu_{n_i''}.$$

Из последовательности $\lambda_{n_i'}$ выберем сходящуюся последовательность. Чтобы не усложнять индексов, считаем, что

$$\lambda_{n_i'} \to \lambda'.$$

Тогда $\nu_{n_i''} = \nu_{n_i'}\lambda_{n_i'}$, откуда

$$\nu'' = \nu'\lambda'. \tag{4.13}$$

Если же рассматривать системы индексов, для которых $n_i' > n_i''$, то аналогичным образом можно получить, что существует некоторое λ'', такое, что

$$\nu' = \nu''\lambda''. \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) следует, что

$$\nu' = \nu'(\lambda'\lambda'').$$

По индукции доказывается, что для любого целого положительного числа n имеем

$$\nu' = \nu'(\lambda'\lambda'')^n.$$

Если теперь $\lambda'\lambda''$ принадлежит к идемпотенту e_0, то, очевидно, будет

$$\nu' = \nu' e_0. \tag{4.15}$$

Пусть λ' принадлежит к идемпотенту e'. Обозначим $H' = \omega(e')$. Как известно, $\omega(\lambda')$ расположено в двустороннем классе смежности G по подгруппе H'. Выберем какой-нибудь элемент $x_1 \in \omega(\lambda')$, тогда любой другой элемент $x_2 \in \omega(\lambda')$ представим в виде

$$x_2 = h'x_1, \quad h' \in H'. \tag{416}$$

Раз $\lambda'\lambda''$ принадлежит к идемпотенту e_0, то $\omega(\lambda')\,\omega(\lambda'')$ расположено в двустороннем классе смежности G по подгруппе $H_0 = \omega(e_0)$. Пусть $y \in \omega(\lambda'')$. Тогда $x_1 y$ и $x_2 y$ находятся в некотором двустороннем классе смежности G по H_0 и поэтому

$$x_2 y = h_0 x_1 y, \quad h_0 \in H_0.$$

Но тогда

$$x_2 = h_0 x_1, \quad h_0 \in H_0. \tag{4.17}$$

Сравнивая (4.16) и (4.17), получаем, что группы H' и H_0 имеют общую часть. Пересечение $H' \cap H_0 = K$ есть также группа, а $\omega(\lambda')$ расположено в правом классе смежности G по подгруппе K: $\omega(\lambda') \subseteq Kx_1$.

Заметим, что тогда мера $\lambda' x_1^{-1}$ сосредоточена в $K \subseteq H_0$. Поэтому имеем

$$e_0\lambda' = e_0(\lambda' x_1^{-1})x_1 = e_0 x_1. \tag{4.18}$$

Возвращаясь теперь к (4.13) и учитывая (4.15) и (4.18), получаем

$$\nu'' = \nu'\lambda' = \nu' e_0 \lambda' = \nu' e_0 x_1 = \nu' x_1,$$

то есть ν'' и ν' принадлежат к одному типу. Это равносильно утверждению теоремы, чем доказательство полностью завершается.

4.7. Независимые случайные величины и цепи Маркова. Полученные результаты можно рассматривать не только как предельные теоремы для композиций независимых случайных величин, но и как предельные и эргодические теоремы для переходных вероятностей некоторых марковских процессов на бикомпактной группе G. Действительно, если на группе G задана цепь Маркова с дискретным временем при помощи вероятностей перехода $\mathbf{P}(x, E)$ — перейти за один шаг из точки x в множество E, то предположим, что эти вероятности перехода инвариантны относительно сдвигов:

$$\mathbf{P}(x, E) = \mathbf{P}(xg, Eg), \quad g \in G.$$

В таком случае для задания цепи достаточно знать вероятности перехода за один шаг из единицы группы e, так как

$$\mathbf{P}(x, E) = \mathbf{P}(e, Ex^{-1}).$$

Такая марковская цепь характеризуется распределением вероятностей

$$\nu(E) = \mathbf{P}(e, E).$$

В этом случае легко определяется распределение вероятностей через n шагов. Так, вероятность перехода за два шага вычисляется по известному правилу:

$$\mathbf{P}^{(2)}(e, E) = \int_G \mathbf{P}(e, dx)\,\mathbf{P}(x, E) = \int_G \mathbf{P}(e, dx)\,\mathbf{P}(e, Ex^{-1}),$$

а это как раз и есть свертка $\nu \cdot \nu$:

$$\nu^2(E) = \int_G \nu(dx)\,\nu(Ex^{-1})$$

Рассмотренные выше предельные теоремы могут поэтому трактоваться как предельные теоремы в теории однородных марковских процессов, инвариантных на группе G. Теоремы 11 и 12 имеют уже дело, как легко видеть, с неоднородным (по времени) марковским процессом.

§ 5. Некоторые оценки скорости сходимости

5.1. Одна равномерная предельная теорема. Данный параграф посвящается некоторым вопросам оценок скорости сходимости композиций бесконечного числа независимых случайных величин к предельному закону. В топологии слабой сходимости проведение оценок такого рода сопряжено с известными трудностями, так как если непрерывную функцию можно в некоторой степени охарактеризовать ее максимальным и минимальным значениями, то подобный характеристический параметр для произвольной меры в топологическом пространстве найти подчас невозможно. Чтобы упростить задачу, мы ограничимся топологией точечной сходимости, т. е. сходимости законов распределения на каждом борелевском множестве из G. При этом мы рассмотрим вероятностные меры, которые допускают некоторые характеристики, по которым можно будет судить в какой-то степени о скорости сходимости к предельному закону. Например, в нижеследующей теореме меры будут сравниваться с инвариантной мерой Хаара группы G.

Теорема 13. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — законы распределения на бикомпактной группе G и пусть $p^{(n)} = p_1 p_2 \ldots p_n$. Если для каждого борелевского множества E из G выполняется*

$$p_n(E) \geqslant \alpha_n m(E), \quad \alpha_n > 0,$$

где $m(E)$ — инвариантная мера Хаара группы G, то

$$|\, p^{(n)}(E) - m(E)\,| \leqslant (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n). \qquad (5.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

расходится, то

$$p^{(n)}(E) \to m(E)$$

равномерно для всех борелевских множеств E из группы G.

Доказательство. Зададим меру $p'_n(E)$ посредством равенства

$$p_n(E) = p'_n(E) + m(E).$$

Так определенная мера p'_n может принимать и отрицательные значения и является обобщенной мерой (см. книгу Халмоша [4]). Определение свертки для таких мер сохраняет свою силу. Докажем, что

$$p'_n m = m p'_n = 0. \tag{5.2}$$

Действительно, например, $p'_n m = (p_n - m)\, m = p_n m - m = m - m = 0$. Аналогично доказывается и второе равенство.

Далее имеем

$$p_1 p_2 = (p'_1 + m)(p'_2 + m) = p'_1 p'_2 + p'_1 m + m p'_2 + m^2 = p'_1 p'_2 + m.$$

Применяя индукцию, окончательно получаем

$$p^{(n)} = p'^{(n)} + m. \tag{5.3}$$

Определим меру $q_n(E)$ как

$$q_n(E) = p'_n(E) + (1 - \alpha_n)\, m(E) = p_n(E) - \alpha_n m(E). \tag{5.4}$$

По аналогии с (5.3) можно доказать, что

$$q^{(n)} = q_1 q_2 \dots q_n = p'^{(n)} + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n)\, m. \tag{5.5}$$

По определению, из (5.4), следует, что $q_n(E) \geqslant 0$. Свертки неотрицательных мер снова дают неотрицательную меру, поэтому и $q^{(n)}(E) \geqslant 0$. Используя это обстоятельство, а также (5.3) и (5.5), получаем следующее неравенство:

$$p^{(n)}(E) = m(E) + p'^{(n)}(E) = [1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n)]\, m(E) +$$

$$+ q^{(n)}(E) \geqslant [1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n)]\, m(E). \tag{5.6}$$

Взяв $G - E$ вместо E в (5.6), мы имеем

$$1 - p^{(n)}(E) \geqslant [1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n)]\, [1 - m(E)],$$

то есть

$$p^{(n)}(E) \leqslant (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n) + [1 - (1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_n)]\, m(E). \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) получаем соответственно

$$m(E) - p^{(n)}(E) \leqslant (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n),$$
$$p^{(n)}(E) - m(E) \leqslant (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n),$$

откуда и следует (5.1).

Следствие (см. [6]). *Если* $\alpha_n = \alpha$; $n = 1, 2, \dots$, *то*

$$|p^{(n)}(E) - m(E)| \leqslant (1-\alpha)^n \tag{5.8}$$

и $p^{(n)}(E) \to m(E)$ *равномерно для всех борелевских множеств* E.

5.2. Случай, когда меры абсолютно непрерывны относительно инвариантной меры Хаара. Здесь мы рассмотрим тот случай, когда независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ одинаково распределены по закону $p(E)$, абсолютно непрерывному относительно инвариантной меры Хаара $m(E)$ группы G. Очевидно, мера p, как элемент полугруппы $S(G)$ принадлежит к идемпотенту m. Поэтому, как было показано в § 3, последовательность p^n слабо сходится к мере m. Сейчас мы покажем, что упомянутая сходимость имеет место и в топологии точечной сходимости.

5.2.1. Итак, покажем, что если p абсолютно непрерывна относительно m, то для любого борелевского множества E

$$p^{(n)}(E) \to m(E). \tag{5.9}$$

Сначала отметим следующее обстоятельство. Абсолютная непрерывность означает, что для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $m(E) < \delta$ имеем $p(E) < \varepsilon$. При этом, если $m(E) < \delta$, то и $m(Ex^{-1}) < \delta$, поэтому $p(Ex^{-1}) < \varepsilon$ и

$$p^2(E) = \int p(Ex^{-1})\,dp(x) < \varepsilon.$$

По индукции доказывается, что и $p^n(E) < \varepsilon$.

Пусть теперь дано борелевское множество E. В силу регулярности меры m найдется такое замкнутое множество $F < E$ и такое открытое множество $V > E$, что $m(V - F) < \delta$. Так как бикомпактное хаусдорфово пространство нормально, то, по лемме Урысона, существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, такая, что $\varphi(x) = 1$ на замкнутом множестве F и $\varphi(x) = 0$ на замкнутом множестве $G - V$. Так как p^n слабо сходятся к m, то для достаточно больших n имеем

$$\left|\int \varphi(x)\,dp^n(x) - \int \varphi(x)\,dm(x)\right| < \varepsilon.$$

Как уже говорилось ранее, из $p(V - F) < \varepsilon$ следует $p^n(V - F) < \varepsilon$, поэтому

$$\left|\int \varphi(x)\,dp^n(x) - p^n(E)\right| = \left|\int\limits_{V-F} \varphi(x)\,dp^n(x) + p^n(F) - p^n(E)\right| < 2\varepsilon.$$

Очевидно, можно считать $\delta \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$|p^n(E) - m(E)| \leqslant \left|p^n(E) - \int \varphi(x)\,dp^n(x)\right| + \left|\int \varphi(x)\,dp^n(x) - \right.$$
$$\left. - \int \varphi(x)\,dm(x)\right| + \left|\int \varphi(x)\,dm(x) - m(E)\right| < 5\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение (5.9).

5.2.2. В силу абсолютной непрерывности закона $p(E)$ его, по теореме Радона — Никодима, можно представить в виде

$$p(E) = \int_E f(x)\, dm(x),$$

где $f(x)$ — некоторая измеримая функция. Предположим, что

$$\inf_{x \in G} f(x) = \alpha > 0.$$

Тогда можно оценить скорость сходимости (5.9). Действительно,

$$p(E) = \int_E f(x)\, dm(x) \geqslant \alpha \cdot m(E),$$

и мы имеем возможность применить теорему 13. Из (5.8) получаем такую оценку:

$$|p^n(E) - m(E)| \leqslant (1-\alpha)^n. \qquad (5.10)$$

5.2.3. Может случиться, что для закона $p(E) = \int_E f(x)\, dm(x)$ будет $\inf_x f(x) = 0$. Но в некоторый момент l для закона $p^l(E) = \int_E f_l(x)\, dm(x)$ будет уже выполняться $\alpha = \inf_x = f_l(x) > 0$. Начиная с этого момента, действует оценка

$$|p^{nl}(E) - m(E)| \leqslant (1-\alpha)^n.$$

Легко оценивается и такая разность:

$$|p^{nl+1}(E) - m(E)| = \left|\int [p^{nl}(Ex^{-1}) - m(E)]\, dp(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |p^{nl}(Ex^{-1}) - m(E)|\, dp(x) \leqslant (1-\alpha)^n.$$

Аналогично для $0 < k < l$:

$$|p^{nl+k}(E) - m(E)| \leqslant (1-\alpha)^n; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5.11)$$

5.3. **Случай конечных групп.** Предположим, что группа G конечна. В этом случае из слабой сходимости распределений на G следует сходимость их на каждом подмножестве E из G. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в соответствующие функционалы характеристическую функцию множества E. Очевидно также, что справедливо и обратное утверждение. Таким образом, для конечных групп топология слабой сходимости мер совпадает с топологией точечной сходимости. В данном разделе мы проведем качественные оценки как в той, так и в другой топологиях.

5.3.1. Пусть мера $p \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту m (здесь также m означает равномерное распределение на G). Рассмотрим случай, когда носитель $\omega(p) = G$. Тогда мы имеем $p(E) > 0$ для всех подмножеств E из конечной

группы G; поэтому можно выбрать общее для всех подмножеств E число α, $0<\alpha<1$, такое, что

$$p(E) \geqslant \alpha \cdot m(E). \tag{5.12}$$

В соответствии с вышеизложенным мы получаем такую равномерную оценку:

$$|p^n(E) - m(E)| \leqslant (1-\alpha)^n. \tag{5.13}$$

Если же $\omega(p) \neq G$, то в некоторый момент, очевидно, носитель все же заполнит всю группу G, и будет действовать оценка типа (5.11).

5.3.2. Случай, когда $\omega(p) = G$, можно разобрать более детально. Здесь мы получим оценку даже для скорости сходимости последовательности

$$f^{(n)}(s) = \int f(sx)\, dp^n(x), \quad f \in C(G); \quad n = 1, 2, \ldots$$

Обозначим

$$M^{(n)} = \max_{s \in G} f^{(n)}(s),$$

$$m^{(n)} = \min_{s \in G} f^{(n)}(s),$$

$$O^{(n)} = M^{(n)} - m^{(n)}.$$

В теореме 10 было доказано, что последовательность $O^{(n)}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, причем монотонно, как видно из следующей цепочки неравенств:

$$m^{(1)} \leqslant m^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant m^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \int f(x)\, dm(x) \leqslant \ldots \leqslant M^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant M^{(2)} \leqslant M^{(1)}.$$

Оценим скорость этой сходимости. Пусть $\alpha = \min_{x \in G} p(x)$. Из наших предположений следует, что $\alpha > 0$. Обозначим e единицу группы G. Для любой пары точек s, t из G можно выбрать $y \in G$ таким образом, чтобы $s = ty$. Тогда имеем

$$f^{(n)}(s) - f^{(n)}(t) = \int_G f^{(n-1)}(sx)\, dp(x) - \int_G f^{(n-1)}(tx)\, dp(x) =$$

$$= \int_t f^{(n-1)}(sx)\, dp(x) + \int_{G-t} f^{(n-1)}(sx)\, dp(x) - \int_y f^{(n-1)}(tx)\, dp(x) -$$

$$- \int_{G-y} f^{(n-1)}(tx)\, dp(x) \leqslant p(e) f^{(n-1)}(s) + p(G-e) M^{(n-1)} - p(y) f^{(n-1)}(ty) -$$

$$- p(G-y) m^{(n-1)} \leqslant \alpha f^{(n-1)}(s) + M^{(n-1)}(p(e) - \alpha) + p(G-e) M^{(n-1)} -$$

$$- \alpha f^{(n-1)}(ty) - m^{(n-1)}(p(y) - \alpha) - p(G-y) m^{(n-1)} = (1-\alpha) O^{(n-1)},$$

или

$$O^{(n)} \leqslant (1-\alpha) O^{(n-1)}.$$

Отсюда получаем искомую оценку:

$$O^{(n)} \leqslant (1-\alpha)^{n-1} O^{(1)}.$$

§ 6. Случайные величины на бикомпактных полугруппах

6.1. Введение. Наряду с рассмотрением случайных элементов на групповых пространствах часто появляется необходимость изучения закономерностей, связанных с компонированием независимых случайных величин со значениями из множества, для которого операция взятия обратного элемента вовсе не обязана существовать. Подобные алгебраические образования с определенной в них ассоциативной операцией называются полугруппами. Если в полугруппе введена топология, в которой заданная операция непрерывна, то мы имеем топологическую полугруппу. В последующем изложении мы будем предполагать что, случайные величины принимают свои значения из бикомпактной хаусдорфовой топологической полугруппы G.

Полугруппы, как множество значений случайной величины, уже рассматривались в литературе. Так, Хевитт и Цукерман [5] перенесли на конечные коммутативные полугруппы ряд теорем Н. Н. Воробьева [23]. Они рассматривали конечные полугруппы, обладающие тем свойством, что существует такое число n, что $x^n = x$ для любого x. Такие полугруппы распадаются на конечное число коммутативных групп. Авторы построили для таких полугрупп гармонический анализ, основанный на свойствах полухарактеров. Изучение инвариантных справа вероятностных мер уже на некоторых типах бикомпактных полугрупп провел Шт. Шварц [19]. Сильные результаты получены им в этой области для случая конечных полугрупп [20].

Применяя метод, изложенный в нашей работе для случая бикомпактных групп, можно получить ряд результатов довольно общего характера и для случая бикомпактных полугрупп. Идея этого обобщения становится вполне понятной, если учесть, что обратная групповая операция во многих случаях не играет решающей роли.

6.2. Предварительные результаты. Итак, пусть G — хаусдорфова бикомпактная полугруппа, которую для краткости будем называть просто бикомпактной полугруппой. Рассмотрим совокупность $S(G)$ всех регулярных мер μ, определенных на борелевских множествах из G и обладающих тем свойством, что $\mu(G) = 1$. Повторяя дословно все рассуждения, которые проводились в § 1, убеждаемся, что совокупность этих мер образует бикомпактную полугруппу, в которой операция умножения $\mu\nu$, где $\mu, \nu \in S(G)$, определяется следующим образом:

$$\mu\nu(E) = \int\int \chi_E(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y), \qquad (6.1)$$

где $\chi_E(x)$ есть характеристическая функция борелевского множества E.

Каждой мере $\mu \in S(G)$ соответствует однозначно функционал $\Phi(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$ на пространстве функций $f \in C(G)$. Очевидно, произведению мер $\mu\nu$ соответствует функционал

$$\int f(x)\, d\mu\nu(x) = \int\int f(yz)\, d\mu(y)\, d\nu(z). \qquad (6.2)$$

6.2.1. Аналогичным образом определяется также и понятие точечной массы, сосредоточенной в элементе $x \in G$. Можно считать, очевидно, как и в п. 1.3.2, что G вложено в $S(G)$. При этом

$$x\mu(E) = \int \chi_E(xy)\, d\mu(y). \qquad (6.3)$$

Как легко видеть, $x\mu(E) = \mu(B)$, где B есть прообраз борелевского множества E при непрерывном отображении $y \to xy$.

6.2.2. **Лемма 11.** *Для любой меры $\mu \in S(G)$ существует единственное замкнутое множество A такое, что $\mu(A) = 1$ и $\mu(V) > 0$ для любого его непустого открытого подмножества V.*

Доказательство. Рассмотрим семейство замкнутых множеств из G, мера μ которых равна единице. Система эта является центрированной и поэтому пересечение всех множеств из этой системы непусто. Обозначим это пересечение A. Если V есть открытое множество, содержащее A, то оно содержит некоторое множество из рассмотренной выше системы замкнутых множеств (см. [13], стр. 84), поэтому $\mu(V) = 1$. Из регулярности меры μ следует тогда, что $\mu(A) = 1$. Из самого построения множества A следует и второе утверждение леммы.

6.2.2.1. Полученное по лемме 11 множество A является наименьшим замкнутым множеством, мера μ которого равна единице. Как и ранее, назовем его носителем меры μ и обозначим $\omega(\mu)$.

6.2.3. **Лемма 12.** $\omega(\mu\nu) = \omega(\mu)\cdot\omega(\nu)$.

Доказательство. Надо доказать, что замкнутое множество $\omega(\mu)\cdot\omega(\nu)$ имеет $\mu\nu$-меру 1, а мера любого его непустого открытого подмножества положительна.

Для любого открытого множества $V \supset \omega(\mu)\cdot\omega(\nu)$ найдутся такие открытые множества $V \supset \omega(\mu)$ и $W \supset \omega(\nu)$, что $V \supset V\cdot W$ (в силу непрерывности полугрупповой операции). Тогда

$$\mu\nu(V) = \int\int \chi_V(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \geqslant \int\int \chi_{V\cdot W}(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \geqslant$$

$$\geqslant \int\int \chi_V(x)\cdot\chi_W(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \mu(V)\,\nu(W) = 1.$$

Из регулярности меры $\mu\nu$ следует тогда, что $\mu\nu$-мера множества $\omega(\mu)\cdot\omega(\nu)$ равна 1. Аналогичным же приемом можно доказать, что если V — его непустое открытое подмножество, то $\mu\nu(V) > 0$.

6.3. **Идемпотенты в $S(G)$.** Подмножество L полугруппы T называется левым идеалом, если $TL \subset L$. Аналогично определяется правый идеал. Идеал, являющийся одновременно левым и правым, называется двусторонним. Полугруппа T называется *простой*, если она не содержит ни одного собственного двустороннего идеала.

Идемпотент e полугруппы T называется *примитивным*, если не существует идемпотента $\pi \neq e$, удовлетворяющего соотношению $e\pi = \pi e = \pi$. Простая полугруппа T называется *вполне простой*, если она удовлетворяет следующим условиям: а) каждый идемпотент T является примитивным, б) для каждого $a \in T$ существуют идемпотенты e и π такие, что

$$ea = a\pi = a.$$

Идеал (левый, правый, двусторонний) полугруппы T называется минимальным, если он не содержит в качестве истинного подмножества идеал полугруппы T. Пересечение всех двусторонних идеалов называется *ядром* полу-

группы T. Если T бикомпактна, то, как показал Нумакура [11], ядро K непусто и является минимальным двусторонним идеалом полугруппы T.

В дальнейшем будем предполагать, что T — бикомпактная полугруппа. В этом случае (см. [11], [1]) ядро K является вполне простой подполугруппой T. Если e — идемпотент из K, то $L = Ke$ есть минимальный левый идеал T, и наоборот, каждый минимальный левый идеал полугруппы T представляется в такой форме.

Если e и π — любые два идемпотента из K, то либо $Ke = K\pi$, либо $Ke \cap K\pi = \emptyset$ (пустое множество). Множества $eK\pi$ являются группами. Таким образом, K есть теоретико-множественная сумма замкнутых групп, изоморфных друг другу.

6.3.1. Теорема 14. *Пусть* $\mu \in S(G)$ *и* $\mu^2 = \mu$. *Тогда* $\omega(\mu)$ *есть вполне простая подполугруппа* G.

Доказательство. Обозначим $H = \omega(\mu)$. Так как $H^2 = H$, то H само является полугруппой. По функции $f \in C(H)$ построим функцию

$$g(y) = \int f(xy)\, d\mu(x).$$

Эта функция непрерывна на H и достигает там своего максимального значения, скажем, в точке $h \in H$. Тогда имеем

$$g(h) = \int f(xh)\, d\mu(x) = \iint f(xyh)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int g(yh)\, d\mu(y),$$

откуда

$$g(h) = g(yh), \quad y \in H. \tag{6.4}$$

Если K — ядро полугруппы H, то $Kh \leqslant K$, и поэтому среди точек максимума функции $g(y)$ найдутся такие, которые лежат в K.

Предположим, что H не вполне проста. Тогда $H \neq K$, и, следовательно $H - K$ непусто. Покажем, что в $H - K$ найдется тогда хоть один идемпотент. Действительно, если бы это было не так, т. е. все идемпотенты H находились в K, то в силу того, что $H^2 = H$, имеем по теореме Коха—Уоллеса [8], что $HEH = H$, где E — множество идемпотентов H. Но поскольку, по предположению, $E \subset K$, то и $HEH \subset K$, и получаем противоречие с приведенным соотношением. Итак, в $H - K$ содержится некоторый идемпотент e. Возьмем теперь неотрицательную функцию $f_0 \in C(H)$, равную единице в точке e и нулю на множестве K. Составленная по функции $f_0(x)$ функция

$$g_0(y) = \int f_0(xy)\, d\mu(x),$$

по доказанному выше, должна обладать точкой максимума $h \in K$. Но очевидно,

$$g_0(h) = \int f_0(xh)\, d\mu(x) = 0,$$

поскольку $xh \in K$, а функция f_0 равна нулю на K. С другой стороны, $g^0(e) > 0$. Действительно, пусть $V(e)$ — некоторая окрестность элемента e, в точках которой значения функции f_0 близки к 1. Мера μ множества $V(e)$ положительна, так как это открытое подмножество носителя меры μ. Тогда

$$g_0(e) = \int f_0(xe)\,d\mu(x) > \int\limits_{V(e)} f_0(xe)\,d\mu(x) > (f_0(e) - \varepsilon)\,\mu(V(e)) > 0.$$

В итоге получаем противоречие: максимальное значение функции g_0 равно нулю, в то время, как $g_0(e) > 0$. Следовательно, $H = K$, и полугруппа H является вполне простой.

6.3.2. Полугруппа T называется *слева простой*, если она не содержит ни одного собственного левого идеала. В таком случае для любого $a \in T$ будет $Ta = T$. Если полугруппа T обладает идемпотентом (например, если T бикомпактна), то решение уравнения $xa = b$ единственно (см. [19]).

Пусть $E = \{e_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ есть множество всех идемпотентов T. Для любого $a \in T$ и $e_\alpha \in E$ будет $ae_\alpha = a$, т. е. каждый идемпотент является правой единицей в T.

Каждое из множеств $G_\alpha = e_\alpha T$ представляет собой замкнутую группу. Для $\alpha \neq \beta$ группы G_α, G_β дизъюнктны. Полугруппу T можно записать в виде суммы непересекающихся групп:

$$T = \sum_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha T = \sum_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha.$$

Для любого $x \in G_\alpha$

$$xT = (xe_\alpha)T = x(e_\alpha T) = xG_\alpha = G_\alpha.$$

Наконец, для каждого $x \in T$ имеем $G_\alpha x = G_\alpha$. Действительно, из предыдущего соотношения следует $G_\alpha x \subseteq G_\alpha$, и если бы $G_\alpha x$ было собственным подмножеством G_α для какого-нибудь $\alpha \in \Lambda$, то мы получили бы противоречие с соотношением $Tx = T$.

6.3.3. Пусть μ — идемпотентный элемент полугруппы $S(G)$. Как было доказано в теореме 14, $H = \omega(\mu)$ есть вполне простая подполугруппа G. Составленная по любой функции $f \in C(H)$ функция $g(y)$ удовлетворяет соотношению (6.4), где $h \in H$ — точка максимума функции $g(y)$. Так как H разбивается на сумму непересекающихся групп, то точка h принадлежит некоторой группе $K(e)$ с единицей e. Как было указано в п. 6.3, множество $T = He$ есть минимальный левый идеал полугруппы H и является поэтому слева простой подполугруппой H (см. [1], [11]). Тогда $Hh = Heh = Th = T$, и функция $g(y)$ принимает постоянное значение на минимальном левом идеале T, содержащем точку h.

Из этих рассуждений следует немедленно такое заключение (обобщение теоремы 4.1 из [20]):

Теорема 15. *Пусть G — бикомпактная полугруппа, а μ есть идемпотент из $S(G)$. Предположим, что $\omega(\mu)$ есть слева простая подполугруппа G. Тогда μ есть справа инвариантная мера на $\omega(\mu)$.*

В некотором роде обращением этого факта является следующая

Теорема 16. *Пусть G — бикомпактная полугруппа, а C есть слева простая подполугруппа G с конечным числом идемпотентов. Пусть $\mu \in S(G)$ удовлетворяет следующим условиям:* а) $\omega(\mu) \subseteq C$, б) *мера μ инвариантна на каждой групповой компоненте $\omega(\mu)$. Тогда μ является идемпотентом в $S(G)$.*

Доказательство. Носитель меры μ разлагается на групповые составляющие:

$$\omega(\mu) = \sum_{\alpha} G_\alpha.$$

На каждой G_α мера μ инвариантна. Тогда имеем

$$\int f(x)\, d\mu^2(x) = \int\int f(xy)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \sum_{\alpha} \int\int_{G_\alpha} f(xy)\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$

$$= \sum_{\alpha} \int\int_{G_\alpha} f(x)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int f(x)\, d\mu(x),$$

так как если $x \in G_\alpha$, то $xy = (xe_\alpha)\, y = x(e_\alpha y)$, где уже $e_\alpha y \in G_\alpha$. Из инвариантности μ на G_α и следует написанное равенство.

6.3.3.1. Если G — бикомпактная полугруппа с единственным идемпотентом, то каждая ее вполне простая подполугруппа является группой, т. е. слева проста. Действительно, если H — вполне простая подполугруппа G, то $H^2 = H$, и H содержит единственный идемпотент. В таком случае, по теореме Коха—Уоллеса [8], H есть группа.

Следствие 1. *Пусть G — бикомпактная полугруппа с единственным идемпотентом. Для того, чтобы $\mu \in S(G)$ была идемпотентным элементом, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mu)$ было группой, а мера μ была инвариантной мерой Хаара на ней.*

6.3.3.2. Если G — коммутативная биквадратная полугруппа, то каждая ее вполне простая подполугруппа, очевидно, является группой (и значит, слева проста). Отсюда имеем

Следствие 2. *Пусть G — коммутативная бикомпактная полугруппа. Для того, чтобы $\mu \in S(G)$ была идемпотентным элементом, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\mu)$ было группой, а мера μ была инвариантной мерой Хаара на ней.*

6.3.4. Покажем, что в коммутативном случае $S(G)$ является полугруппой с нулем.

Теорема 17. *Пусть G — коммутативная бикомпактная полугруппа. Тогда существует единственная мера $m \in S(G)$ такая, что $m\mu = m$ для любого $\mu \in S(G)$. При этом m есть инвариантная мера на минимальном идеале $G_0 \subset G$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $S(G)$ тоже является коммутативной бикомпактной полугруппой. Поэтому в полугруппе $S(G)$ имеется, и притом единственный, примитивный идемпотент m. Это значит, что для любого идемпотента $e_\alpha \in S(G)$ имеем $me_\alpha = m$ (см. [18]). Что представляет собой m и его носитель $\omega(m)$? Пусть G_0 — минимальный идеал полугруппы G. Покажем, что $\omega(m) = G_0$. В коммутативном случае минимальный идеал G_0 представляет собой группу. Поэтому на G_0 существует инвариантная мера Хаара m'. Мера m' будет являться идемпотентным элементом в полугруппе $S(G)$. Из примитивности m следует, что $mm' = m$. Но тогда будет $\omega(m) \cdot G_0 = \omega(m)$, т. е. $\omega(m)$ и есть минимальный идеал G_0.

Для того, чтобы доказать, что m является нулем полугруппы $S(G)$, осталось показать, что среди элементов, принадлежащих к идемпотенту m, нет

регулярных (см. § 2), т. е. таких элементов ν, что $\nu m = \nu$. Действительно, в таком случае мы имели бы, что $\omega(\nu) = G_0$, а в силу инвариантности меры m имели бы тогда, что $\nu m = m$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, теорема полностью доказана.

6.3.5. **Лемма 13.** *$S(G)$ имеет единицу тогда и только тогда, когда G имеет единицу e. В этом случае единицей $S(G)$ является точечная масса в e.*

Доказательство. Если G имеет единицу e, то точечная масса в e является единицей в $S(G)$. Обратно, если e' — единица в $S(G)$, то легко доказать, что $\omega(e')$ состоит из одного элемента, являющегося единицей в полугруппе G. Это следует из того факта, что для любого $x \in G$ имеем, по условию, $x \cdot \omega(e') = x$.

6.4. Классификация вероятностных мер в коммутативном случае. Если G есть группа, то, как мы показали в §§ 3, 4, меры из полугруппы $S(G)$ допускают эффективную классификацию, в связи с чем становится прозрачной идея доказательства последующих предельных теорем. В случае полугрупп также можно попытаться провести подобное исследование вероятностных мер, составляющих полугруппу $S(G)$, в смысле детальной интерпретации понятия принадлежности элемента полугруппы к идемпотенту. Легче всего это сделать в предположении, что G (а, значит, и $S(G)$) есть коммутативная бикомпактная полугруппа.

6.4.1. Итак, пусть полугруппы G и $S(G)$ коммутативны. Сначала разберем свойства регулярных элементов полугруппы $S(G)$. Пусть мера $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту $a \in S(G)$ и является регулярным элементом, т. е. $\mu a = \mu$. Как мы установили в п. 6.3.3.2, $\omega(a)$ есть замкнутая подгруппа G. Пусть ее единица есть e_α. Тогда $\omega(a)$ представляет, очевидно, подгруппу максимальной группы G_α, принадлежащей к идемпотенту e_α. Справедлива следующая

Теорема 18. *Если $\mu \in S(G)$ есть регулярный элемент, принадлежащий к идемпотенту $a \in S(G)$, то $\omega(\mu)$ есть класс смежности группы G_α по подгруппе $\omega(a)$; при этом μ будет инвариантной мерой на этом классе смежности.*

Доказательство. Из соотношения $\mu a = \mu$ следует, что

$$\omega(\mu) \cdot \omega(a) = \omega(\mu). \tag{6.5}$$

Отсюда мы заключаем (см. лемму 4), что элементы $\omega(\mu)$ принадлежат либо к идемпотенту e_α, либо к какому-нибудь идемпотенту e_β такому, что $e_\alpha e_\beta = e_\beta$. Но последний случай невозможен. В самом деле, поскольку все регулярные элементы из $S(G)$, принадлежащие к идемпотенту a, образуют группу, то найдется среди них такой элемент μ^{-1}, что $\mu\mu^{-1} = a$. Имеем тогда

$$\omega(\mu) \cdot \omega(\mu^{-1}) = \omega(a),$$

откуда уже с очевидностью вытекает, что в $\omega(\mu)$ не могут входить элементы, принадлежащие к другому идемпотенту e_β, свойства которого мы определили выше.

Итак, множество $\omega(\mu)$ состоит из элементов, принадлежащих к идемпотенту e_α. В то же время эти элементы должны быть регулярными, так как

из (6.5) видно, что они инвариантны относительно умножения на e_α. Но тогда $\omega(\mu)$ расположено в пределах группы G_α, поэтому утверждения теоремы следуют из соответствующих предложений § 3.

6.4.2. Мы исследовали природу регулярных элементов полугруппы $S(G)$. Что же представляют собой другие меры?

Мы продолжаем предполагать, что полугруппы G и $S(G)$ коммутативны. Пусть $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту $a \in S(G)$ и не является регулярным элементом. Выясним, каким условиям в этом случае должны удовлетворять элементы множества $\omega(\mu)$. Пусть e_α — единица группы $\omega(a)$. Будем последовательно устанавливать те условия, которым должно удовлетворять множество $\omega(\mu)$.

1) Покажем, что в $\omega(\mu)$ *могут входить только элементы, принадлежащие к таким идемпотентам* e_β, *что* $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$.

Действительно, мера μa должна быть регулярным элементом, принадлежащим к идемпотенту a. Но тогда, по предыдущей теореме, $\omega(\mu a)$ должно быть классом смежности G_α по подгруппе $\omega(a)$. Следовательно,

$$\omega(\mu a) = \omega(\mu) \cdot \omega(a) \subseteq G_\alpha,$$

откуда и следует справедливость нашего утверждения.

2) Умножим μ на e_α, тогда $\omega(\mu e_\alpha) = \omega(\mu)\, e_\alpha \subseteq G_\alpha$. Мера μe_α по-прежнему принадлежит к идемпотенту a, в то же время $\omega(\mu e_\alpha) \subseteq G_\alpha$. Значит к элементу μe_α можно применить формулировку принадлежности к идемпотенту из п. 4.2. Отсюда следует, что $\omega(\mu)\, e_\alpha$ *расположено в каком-нибудь одном классе смежности группы* G_α *по подгруппе* $\omega(a)$.

3) Пусть имеется замкнутое множество $A \subseteq G$ и $\{e_\beta\}$ есть система идемпотентов, к которым принадлежат элементы множества A. Докажем, что *существует наименьший идемпотент* e_A, *которому подчинены все идемпотенты системы* $\{e_\beta\}$. Это означает, что для всех e_β нашей системы будет $e_\beta e_A = e_A$, и для любого другого идемпотента e_λ, обладающего этим свойством, справедливо соотношение $e_\lambda e_A = e_\lambda$.

Построим наименьшую замкнутую подполугруппу G, содержащую множество A. Сделать это можно таким образом. Рассмотрим совокупность всех замкнутых подполугрупп G, содержащих множество A. Они образуют, очевидно, центрированную систему замкнутых множеств бикомпактного пространства G. Поэтому пересечение всех этих множеств непусто и представляет замкнутую полугруппу, содержащую множество A. Обозначим ее $\Pi(A)$. Коммутативная бикомпактная полугруппа должна содержать единственный примитивный идемпотент (см. [18]). Обозначим e_A такой идемпотент полугруппы $\Pi(A)$. Докажем, что это как раз тот самый идемпотент e_A, свойства которого мы определили выше.

Действительно, во-первых, e_A уничтожает при умножении все идемпотенты полугруппы $\Pi(A)$. Значит, это будет выполняться и для системы идемпотентов $\{e_\beta\}$, поскольку последние содержатся в полугруппе $\Pi(A)$.

Докажем, во-вторых, что для любого идемпотента e_λ, уничтожающего при умножении идемпотенты e_α, будет выполняться следующее соотношение: $e_A e_\lambda = e_\lambda$. Для этого сначала покажем, что если для идемпотента e_λ выполняется

$$e_\lambda e_\beta = e_\lambda, \tag{6.6}$$

то можно построить такую замкнутую полугруппу, содержащую множество A, что e_λ будет в ней примитивным идемпотентом. Такой полугруппой является наименьшая замкнутая полугруппа, содержащая теоретико-множественную сумму множеств A и e_λ. В самом деле, про эту полугруппу можно сказать, что она есть замыкание множества, состоящего из всевозможных произведений элементов множества A и e_λ, взятых в конечном числе. Но такие конечные произведения, очевидно, принадлежат к идемпотенту e_λ или к идемпотентам, которые уничтожаются при умножении идемпотентом e_λ. Это положение не меняется и при замыкании данного множества.

Теперь легко доказать наше предложение. Пусть для идемпотента e_λ выполняется соотношение (6.6). Составим замкнутую полугруппу, содержащую множество A, в которой e_λ был бы примитивным идемпотентом. Но раз эта полугруппа содержит множество A, то она должна содержать и наименьшую полугруппу $\Pi(A)$, в которой содержится и идемпотент e_A. Тогда, в силу примитивности e_λ в полученной полугруппе, $e_\lambda e_A = e_\lambda$, что и требовалось доказать.

4) Пусть $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту $a \in S(G)$. Обозначим e_α единицу группы $\omega(a)$. *Если по множеству* $\omega(\mu)$ *составить тот наименьший идемпотент* e_μ, *который уничтожает при умножении все идемпотенты, к которым принадлежат элементы множества* $\omega(\mu)$, *то оказывается, что*

$$e_\mu = e_\alpha.$$

Из условия 1) мы видим, что e_α уничтожает при умножении все идемпотенты, к которым принадлежат элементы множества $\omega(\mu)$.

Пусть $e_\mu \neq e_\alpha$. Как было доказано, в этом случае должно быть $e_\mu e_\alpha = e_\alpha$. Поэтому мера μe_μ по-прежнему принадлежит к идемпотенту a. С другой стороны, элементы множества $\omega(\mu) e_\mu$ являются регулярными элементами, принадлежащими к идемпотенту e_μ. Следовательно, $\omega(\mu) e_\mu$ содержится в максимальной группе G_μ, принадлежащей к идемпотенту e_μ. Но тогда, в силу результатов §§ 3 и 4, мера μe_μ должна принадлежать к идемпотенту $b \neq a$, представляющему собой инвариантную меру некоторой подгруппы группы G_μ. Это противоречие и доказывает наше предложение.

Резюмируем все сказанное. Пусть по-прежнему $a \in S(G)$ есть идемпотент, e_α — единица группы $\omega(a)$, а G_α — максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e_α. Имеет место

Теорема 19. *Для того, чтобы элемент* $\mu \in S(G)$ *принадлежал к идемпотенту* $a \in S(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы* e_α *был наименьшим идемпотентом, уничтожающим при умножении все идемпотенты, к которым принадлежат элементы множества* $\omega(\mu)$, *и чтобы подгруппа* $\omega(a)$ *группы* G_α *была минимальной в смысле того свойства, что* $\omega(\mu) e_\alpha$ *содержится в одном классе смежности* G_α *по этой подгруппе.*

6.5. Предельные теоремы. В этом разделе мы рассмотрим некоторые предельные теоремы для композиций независимых случайных величин со значениями из бикомпактной полугруппы G. Как окажется, во многих случаях дело сводится к случаю группового пространства, вследствие чего можно воспользоваться результатами предыдущих параграфов нашей работы.

6.5.1. Разберем задачу об одинаково распределенных независимых случайных величинах. Очевидно, здесь справедлива теорема 4 из п. 3.1, поскольку мы не пользовались при ее доказательстве тем, что G — группа. Поэтому *для $a \in S(G)$ тогда и только тогда существует такая мера $\mu \in S(G)$, что $a = \lim \mu^k$ при $k \to \infty$, когда a есть идемпотент.*

Вместе с тем справедливо и следующее утверждение: *для того, чтобы для элемента $\mu \in S(G)$, принадлежащего к идемпотенту a, существовал предел последовательности μ^k, $k = 1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu a = a$.*

6.5.1.1. Посмотрим, как выглядит последний признак для коммутативных полугрупп. Пусть $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту $a \in S(G)$. Тогда, по предыдущему, для того чтобы $a = \lim\limits_{k \to \infty} \mu^k$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu a = a$. Из теоремы 19 следует, что это равносильно тому, что

$$\omega(\mu) e_\alpha \subseteq \omega(a). \tag{6.7}$$

6.5.2. Отметим, что для коммутативных бикомпактных полугрупп выполнена и теорема 7 для «нормированных» композиций одинаково распределенных независимых случайных величин. Действительно, пусть $\mu \in S(G)$ принадлежит к идемпотенту $a \in S(G)$, но условие (6.7) не выполнено. Тогда $\omega(\mu) e_\alpha$ расположено в некотором классе смежности группы G_α по подгруппе $\omega(a)$, отличном от этой подгруппы. Допустим, что этот класс смежности есть $\omega(a) p_\alpha$, где $p_\alpha \in G_\alpha$. Очевидно, мера $\mu p_\alpha^{-1} \in S(G)$ принадлежит опять к идемпотенту a и для нее выполнено условие (6.7). Следовательно, последовательность $(\mu p_\alpha^{-1})^k = \mu^k p_\alpha^{-k}$; $k = 1, 2, \ldots$, будет сходиться к инвариантной мере $a \in S(G)$.

6.5.3. В коммутативном случае не составляет труда перенести на полугруппы теорему 12 из п. 4.6. Пусть имеется последовательность мер $\mu_n \in S(G)$; $n = 1, 2, \ldots$ на коммутативной бикомпактной полугруппе G. В соответствии с 3) из п. 6.4.2 найдем наименьший идемпотент $e_\lambda \in G$, уничтожающий при умножении все идемпотенты, к которым принадлежат элементы множеств $\omega(\mu_n)$; $n = 1, 2, \ldots$. Возьмем теперь меры $\mu_n e_\lambda \in S(G)$. Носители этих мер сосредоточены уже на группе G_λ (максимальной группе, принадлежащей к идемпотенту e_λ). Производя нормировку сдвигом посредством элементов группы G_λ, в соответствии с теоремой 12, добиваемся того, что последовательность таким образом нормированных мер будет сходиться.

6.6. Заключение. Как мы видели, многие задачи теории вероятностей на коммутативных бикомпактных полугруппах можно свести к аналогичным задачам на групповом пространстве. В связи с этим было бы полезно рассмотреть вопрос о построении гармонического анализа на таких полугруппах, что позволило бы уточнить некоторые предельные теоремы. К сожалению, рассмотрение как этой, так и других интересных задач привело бы к значительному увеличению объема работы. Поэтому мы ограничимся формулировкой тех задач, которые, по нашему мнению, заслуживают внимания.

Во-первых, необходимо было бы изучить классификацию вероятностных мер на бикомпактной полугруппе в некоммутативном случае. Полезность такого изучения вполне очевидна.

Далее, оригинальные задачи возникают при рассмотрении одноидемпотентных полугрупп. Когда единственный идемпотент такой полугруппы

является нулем, полугруппа называется нуль-полугруппой. Предельные теоремы для независимых случайных величин со значениями из нуль-полугрупп являются наиболее простыми и красивыми. Интересно рассмотреть также и бикомпактные группы с нулем. В этом отношении очень поможет ознакомление с работами [12] и [21].

По-прежнему остается открытым вопрос о природе идемпотентных элементов полугруппы мер $S(G)$ в общем случае. Эта задача является, очевидно, основной для решения указанных проблем.

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 12.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Clifford, Semigroups containing minimal ileals, Amer. J. Math. **70**, No. 3, (1948), 521—526.
[2] A. Dvoretzky, J. Wolfowitz, Sums of random integers reduced modulo *m*, Duke Math. J., **18** (1951), 501—507.
[3] Л. П. Грабарь, Одна теорема о бикомпактных группах, Матем. сб. **27(69)**, № 1 (1950), 139—142.
[4] П. Халмош, Теория меры, ИЛ, М., 1953.
[5] E. Hewitt, H. S. Zuckerman, Arithmetic and limit theorems for a class of random variables, Duke Math., J., 22, No. 4, (1955), 595—615.
[6] Y. Kawada, K. Ito, On the Probabilit Distribution on a Compact Group, Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan, 22, No. 12, (1940) 977—998.
[7] Б. М. Клосс, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной группы, ДАН СССР, **109**, № 3 (1953), 453—455.
[8] R. J. Koch, A. D. Wallace, Minimal ideals in compact semigroups, Duke Math., J., **21**, No. 4 (1954).
[9] М. Г. Крейн, Д. А. Мильман, On extreme points of regular convex sets, Studia Math., **IX** (1940), 133—137.
[10] P. Levy, L'addition des variables aleatoires definies sur une circonference, Bull. Soc. Math. France, **67** (1939), 1—40.
[11] K. Numakura, On bicompact semigroups, Math. J. Okayama Univ., 1, No. 1—2 (1952), 99—108.
[12] K. Numakura, On bicompact semigroups with zero, Bull. Yamagata Univ., No. **4** (1951), 405—412.
[13] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, ГИТТЛ, М., 1954.
[14] А. Прекопа, А. Реньи, К. Урбаник, О предельном распределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных коммутативных топологических группах, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **VII**, № 1 (1956), 11—16.
[15] D. Rees, On cemigroups, Proc. Cambridge Philos. Soc., **36**, No. 4 (1940), 387—400.
[16] Я. И. Ривкинд, Предельная теорема теории вероятностей на компактных топологических группах, Ученые записки Гродненского пед. ин-та сер. мат., вып. 1 (1955),
[17] Ш т. Шварц, К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп, Чехосл. мат. ж., **5** (180), № 1 (1955).
[18] Ш т. Шварц, Характеры бикомпактных полугрупп, Чехосл. матем. ж. 5(80), № 1 (1955).
[19] Ш т. Шварц, О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп, Чехосл. мат. ж., **7**(82), № 2 (1957), 165—182.
[20] S t. Schwarz, On the structure of the semigroup of measures on a finite semigroup, Чехосл. мат. ж. **7**(82), № 3 (1957), 358—373.
[21] T. Tamyra, On compact one-idempotent somigroups, Kodai Math. Sem. Reports, N 1 (1954), 17—21.
[22] K. Urbanik, On the limiting probability distribution on a compact topological group, Eundamenta Math., XLIV, No. 3 (1957), 253—261.

[23] Н. Н. Воробьев, Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах, Матем. сб., **34**, № 1, (1954), 89—126.
[24] A. D. Wallace The structure of topological semigroups, Bull. Amer. Math. Soc., **61**, No. 2 (1955), 95—112.
[25] А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ., М., 1950.
[26] J. G. Wendel, Haar measure and the semigroup of measures on a compact group, Proc. Amer. Math. Soc., 5, No. 6 (1954).

PROBABILITY DISTRIBUTIONS ON BICOMPACT TOPOLOGICAL GROUPS

B. M. KLOSS (*MOSCOW*)

(*Summary*)

In this paper random variables defined on a bicompact topological group G are examined. A regular completely additive measure μ defined on the class of all Borel subsets of G with $\mu(G) = 1$ will be called a probability distribution.

Let ξ_1, ξ_2 be two independent G-valued random variables with probability distributions μ_1, μ_2. Then the product $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ has the probability distribution $\mu = \mu_1\mu_2$, where the convolution $\mu_1\mu_2$ is defined by the formula:

$$\mu_1\mu_2(E) = \int_G \mu_1(Ex^{-1})\, d\mu_2(x). \qquad (1)$$

Let us denote by $S(G)$ the set of all probability distributions on a bicompact group G. By virtue of the multiplication defined in (1), the set $S(G)$ has become clearly a semigroup. It is possible to introduce into $S(G)$ a certain topology so that it will become a Hausdorf bicompact semigroup.

The purpose of this paper is to find the class of all possible limiting distributions for a sequence of independent G-valued random variables compositions and the conditions for convergence. In each case the limit as $n \to \infty$ of μ^n, where μ^n is the n-th power of μ, results in a stable distribution. (We say that a distribution is stable if the composition of two independent random variables with the given distribution also has the given distribution). A distribution is stable, that is, idempotent, if, and only if, it is the Haar's measure of a closed subgroup H of G and 0 outside.

The main result is **Theorem 12**:

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables. We construct the compositions

$$\zeta_n = \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n.$$

Then, non-random constants a_n can be found so that the sequence of normalized compositions

$$\eta_n = \zeta_n a_n$$

has a limiting distribution.

The results obtained are extended to the case of bicompact topological semigroups. Some material contained in this paper was published in [7] without detailed proofs.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1959
Том IV Выпуск 3

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АБСТРАКТНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. А. РОЗАНОВ

Введение

В настоящей работе рассматриваются функции $x(t)$ действительного переменного t, $-\infty < t < +\infty$ со значениями в некотором гильбертовом пространстве H, являющиеся в некотором смысле обобщением стационарных функций, т. е. таких, для которых скалярное произведение

$$(x_{t+\tau}, x_t) = B(\tau) \tag{1.0}$$

не зависит от t. Как известно, функцию $x(t)$, удовлетворяющую условию (1.0), можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda), \tag{2.0}$$

где $\Phi(\Delta)$ — аддитивная функция интервала Δ со значениями в H такая, что

$$(\Phi(\Delta), \quad \Phi(\Delta')) = F(\Delta \cap \Delta'), \tag{3.0}$$

где $F(\Delta)$ — так называемая спектральная мера.

Развитая для стационарных функций спектральная теория (см. например, [1]), может быть обобщена в некоторых случаях и на нестационарные функции $x(t)$. В настоящей работе такое обобщение проводится на два класса функций: одним таким классом являются функции $x(t)$, которые можно представить в виде (2.0), где $\Phi(\Delta)$ уже не обязательно удовлетворяет условию (3.0); другим таким классом являются функции, для которых существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_{t+\tau}, x_t)\, dt = B(\tau), \tag{4.0}$$

при всех τ, $-\infty < \tau < +\infty$.

В связи с этим, в начале работы рассматриваются аддитивные функции $\Phi(\Delta)$ со значениями в H. Получаемые при этом результаты справедливы для функций $\Phi(\Delta)$, заданных на системе $\mathfrak{S}$ подмножеств произвольного пространства R; требуется лишь, чтобы система $\mathfrak{S}$ была полукольцом (ср. [8]). Отметим также, что большинство излагаемых результатов может быть автоматически перенесено на случай, когда пространство H — произвольное банаховское.

§ 1. Абстрактные меры и интегрирование

1°. Пусть H — некоторое гильбертово пространство и $\Phi(\Delta)$ — аддитивная функция (мера) множеств прямой $R = \{-\infty < \lambda < \infty\}$ со значениями в H, $\Phi(\Delta) \in H$ определенная на совокупности множеств $\mathfrak{S}$, которая состоит из пустого множества $\varnothing$ всей прямой R и всевозможных конечных сумм полуинтервалов $\Delta = [\lambda_1, \lambda_2)$. Свойство аддитивности $\Phi(\Delta)$ заключается в том, что если $\Delta = \bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k$; $\Delta, \Delta_k \in \mathfrak{S}$, причем Δ_k не пересекаются, то

$$\Phi(\Delta) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(\Delta_k). \tag{1.1}$$

Положим

$$F(\Delta, \Delta') = (\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')). \tag{2.1}$$

В силу (1.1), $F(\Delta, \Delta')$ есть аддитивная функция множеств $\Delta \times \Delta'$ плоскости, определенная на совокупности $\mathfrak{S}^2$. Отметим важное свойство положительной определенности функции $F(\Delta, \Delta')$:

$$F(\Delta, \Delta') = \overline{F(\Delta', \Delta)}, \quad \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k \bar{\alpha}_j F(\Delta_k, \Delta_j) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

для любых наборов комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ из $\mathfrak{S}$.

Назовем меру $\Phi(\Delta)$ непрерывной, если для любой монотонно убывающей последовательности множеств Δ_n, $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \varnothing$, имеет место

$$\| \Phi(\Delta_n) \| \to 0 \tag{4.1}$$

при $n \to \infty$. (Символ $\| h \|$ означает, как обычно, норму элемента h; $\| h \| = (h, h)^{\frac{1}{2}}$). Условие (4.1) эквивалентно, очевидно, непрерывности функции $F(\Delta, \Delta')$:

$$F(\Delta_m, \Delta_n) \to 0 \tag{5.1}$$

при $n, m \to \infty$.

Теорема 1.1. *Для любой непрерывной аддитивной функции $F(\Delta, \Delta')$ множеств $\Delta \times \Delta'$; $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{S}$ обладающей свойством* (3.1), *в пространстве H существует мера $\Phi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{S}$, такая, что*

$$(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta, \Delta').$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_r$ есть совокупность полуинтервалов $\Delta = [\lambda_1, \lambda_2)$ с рациональными концами λ_1, λ_2. Хорошо известно (см. например, [1]), что из свойства (3.1) положительной определенности вытекает существование элементов $\Phi(\Delta) \in H$, $\Delta \in \mathfrak{S}_r$, таких, что

$$(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta, \Delta').$$

Далее, пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ не пересекаются и

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k; \quad \Delta, \Delta_k \in \mathfrak{S}_r; \quad \Phi'(\Delta) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(\Delta_k).$$

Имеем:

$$\| \Phi(\Delta) - \Phi'(\Delta) \|^2 = F(\Delta, \Delta) - \sum_{k=1}^{m} F(\Delta_k, \Delta) - \sum_{k=1}^{m} F(\Delta, \Delta_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} F(\Delta_k, \Delta_j) = F(\Delta, \Delta) - F\left(\bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k, \Delta\right) -$$

$$- F\left(\Delta, \bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k\right) + F\left(\bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k, \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j\right) = 0$$

и, таким образом,

$$\Phi(\Delta) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(\Delta_k).$$

В силу непрерывности F, если $\Delta \in \mathfrak{S}$ и $\Delta = \bigcap_n \Delta_n$, $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \in \mathfrak{S}_r$, имеем

$$\| \Phi(\Delta_m) - \Phi(\Delta_n) \|^2 = \| \Phi(\Delta_m \setminus \Delta_n) \|^2 =$$

$$= F(\Delta_m \setminus \Delta_n, \ \Delta_m \setminus \Delta_n) \to 0,$$

при $n > m \to \infty$. Положим

$$\Phi(\Delta) = \lim_{n \to \infty} \Phi(\Delta_n)$$

и определим $\Phi(\Delta)$ на всей совокупности $\mathfrak{S}$ по свойству конечной аддитивности. Полученная функция $\Phi(\Delta)$ очевидно, удовлетворяет условиям теоремы.

Будем говорить, что функция $\Phi(\Delta)$ имеет ограниченную вариацию, если для любого элемента $h \in H$, числовая аддитивная функция $F_h(\Delta)$,

$$F_h(\Delta) = (\Phi(\Delta), h), \tag{6.1}$$

имеет ограниченную вариацию, т. е.

$$\sup_{\Delta_k} \sum_{k=1}^{m} | F_h(\Delta_k) | = \operatorname{Var} F_h < \infty, \tag{7.1}$$

где sup берется по всем конечным наборам $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ непересекающихся множеств из $\mathfrak{S}$ (ср. [4], [5]).

Нетрудно показать (см., например, [4]), что если $\Phi(\Delta)$ имеет ограниченную вариацию, то существует такая постоянная M, не зависящая от h, что

$$\operatorname{Var} F_h \leqslant M \cdot \| h \|. \tag{8.1}$$

Из (8.1) следует, что

$$\sup_{\Delta_k, \alpha_k} \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi(\Delta_k) \right\| \leqslant M, \tag{9.1}$$

где sup берется по всем конечным наборам непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ из $\mathfrak{S}$ и произвольным комплексным числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $|\alpha_k| \leqslant 1$, так как

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi(\Delta_k), h\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k (\Phi(\Delta_k), h)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |F_h(\Delta)| \leqslant \operatorname{Var} F_h \leqslant M \| h \|$$

при любом h, и в частности, для $h = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi(\Delta_k)$.

Определим вариацию меры Φ на множестве $\Delta \in \mathfrak{S}$ равенством

$$\operatorname{Var}_\Delta \Phi = \sup_{\Delta_k,\, \alpha_k} \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi(\Delta_k) \right\|; \tag{10.1}$$

где sup берется по всем конечным наборам непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ из $\mathfrak{S}$, $\Delta_k \subseteq \Delta$ и любым комплексным числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $|\alpha_k| \leqslant 1$.

Отметим, что $\operatorname{Var}_\Delta \Phi$, как функция множества, монотонна и полуаддитивна, т. е. если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, то

$$\operatorname{Var}_{\Delta_1} \Phi \leqslant \operatorname{Var}_\Delta \Phi \leqslant \operatorname{Var}_{\Delta_1} \Phi + \operatorname{Var}_{\Delta_2} \Phi. \tag{11.1}$$

Очевидно имеет место

$$\operatorname{Var}_\Delta F_h \leqslant \operatorname{Var}_\Delta \Phi \| h \| \tag{12.1}$$

для любого множества $\Delta \in \mathfrak{S}$ и произвольного элемента $h \in H$.

Назовем абстрактную меру $\Phi(\Delta)$ слабо непрерывной, если числовая мера $F_h(\Delta) = (\Phi(\Delta), h)$ при любом $h \in H$ непрерывна, т. е. если последовательность $\Delta_n \in \mathfrak{S}$ такова, что $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \varnothing$, то

$$F_h(\Delta_n) \to 0 \tag{13.1}$$

при $n \to \infty$.

Обозначим $H(\Phi)$ линейное замыкание элементов $\Phi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{S}$.

Теорема 2.1. *Всякая слабо непрерывная абстрактная мера $\Phi(\Delta)$ ограниченной вариации, $\Phi(\Delta) \in H$, определенная на $\mathfrak{S}$, однозначно продолжается в слабо непрерывную меру $\widetilde{\Phi}(\Delta)$, $\Phi(\Delta) \in H(\Phi)$ определенную уже на алгебре $\widetilde{\mathfrak{S}}$ всех измеримых лебеговских множеств прямой R, причем $\operatorname{Var}_R \widetilde{\Phi} = \operatorname{Var}_R \Phi$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $h \in H(\Phi)$ и рассмотрим числовую меру $F_h(\Delta)$. В силу (13.1), она σ-аддитивна на $\mathfrak{S}$ и поэтому продолжается однозначно на алгебру $\widetilde{\mathfrak{S}}$ всех измеримых лебеговских множеств прямой R (см., например, [8]). Значение этой меры $F_h(\Delta)$ при любом фиксированном $\Delta \in \mathfrak{S}$ определяет функционал от $h \in H(\Phi)$, причем в силу очевидных соотношений

$$F_{h_1+h_2}(\Delta) = F_{h_1}(\Delta) + F_{h_2}(\Delta), \quad F_{ah}(\Delta) = \bar{\alpha} F_h(\Delta),$$

$$F_h(\Delta) \leqslant \operatorname{Var}_R F_h \leqslant \operatorname{Var}_R \Phi \cdot \| h \| \tag{14.1}$$

этот функционал линеен, и потому, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, существует элемент $\widetilde{\Phi}(\Delta) \in H(\Phi)$, такой, что

$$F_h(\Delta) = (\Phi(\Delta), h) \tag{15.1}$$

при всех $h \in H(\Phi)$. Если $\Delta \in \mathfrak{S}$, то $\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta)$.

Очевидно, определенная соотношением (15.1) функция $\widetilde{\Phi}(\Delta)$, $\Delta \in \widetilde{\mathfrak{S}}$, аддитивна.

Далее,

$$\mathrm{Var}_\Delta F_h \leqslant \mathrm{Var}_{\Delta'} F_h \leqslant \mathrm{Var}_{\Delta'} \Phi \cdot \| h \| \tag{16.1}$$

для любых $\Delta \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ и $\Delta' \in \mathfrak{S}$, $\Delta \subseteq \Delta'$ и $h \in H(\Phi)$ и поэтому

$$\mathrm{Var}_\Delta \widetilde{\Phi} \leqslant \sup_{\| h \| = 1} \mathrm{Var}_\Delta F_h \leqslant \mathrm{Var}_{\Delta'} \Phi \tag{17.1}$$

и, таким образом, определяемая соотношением (14.1) мера $\widetilde{\Phi}(\Delta)$ удовлетворяет условиям теоремы.

2°. В силу предыдущей теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что абстрактная слабо непрерывная мера $\Phi(\Delta)$ ограниченной вариации определена на всех измеримых лебеговских множествах прямой R.

Пусть измеримая функция $\varphi(\lambda)$ принимает лишь конечное число значений:

$$\varphi(\lambda) = a_k, \quad \text{при} \quad \lambda \in \Delta_k, \quad k = \overline{1, m}. \tag{18.1}$$

Определим интеграл $I(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$ равенством

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi(\Delta_k). \tag{19.1}$$

Интеграл от ограниченной измеримой функции $\varphi(\lambda)$ определяется (ср. [4]), как

$$I(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{20.1}$$

где $\varphi_n(\lambda)$ — некоторая последовательность функций вида (19.1), равномерно сходящаяся к $\varphi(\lambda)$ при $n \to \infty$, а предел понимается в смысле сходимости по норме.

Определение (20.1) корректно, так как если $\psi_m(\lambda)$, последовательность функций вида (18.1), также сходится равномерно при $m \to \infty$ к $\varphi(\lambda)$, то

$$\| I(\varphi_n) - I(\psi_m) \| \leqslant \sup_\lambda | \varphi_n(\lambda) - \psi_m(\lambda) |\, \mathrm{Var}_R \Phi \to 0, \tag{21.1}$$

при $n, m \to \infty$.

Интеграл $I_\Delta(\varphi)$ по множеству Δ определим равенством

$$I_\Delta(\varphi) = \int_\Delta \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\chi_\Delta(\lambda)\,\Phi(d\lambda), \tag{22.1}$$

где $\chi_\Delta(\lambda)$ — характеристическая функция множества Δ.

Далее, неограниченную функцию $\varphi(\lambda)$ назовем интегрируемой, если существует последовательность $\varphi_n(\lambda)$ функций вида (18.1), сходящаяся к $\varphi(\lambda)$ равномерно по λ на каждом множестве $A_N = \{\lambda : |\varphi(\lambda)| \leqslant N\}$ при любом фиксированном N, и кроме того,

$$\| I_{R/A_N}(\varphi_n) \| \to 0, \tag{23.1}$$

при $N \to \infty$ равномерно по n.

Обозначим эту сходимость $\varphi_n(\lambda) \Rightarrow \varphi(\lambda)$. Положим в этом случае

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) \tag{24.1}$$

(предел в (24.1) существует и не зависит от последовательности $\varphi_n(\lambda)$, $\varphi_n(\lambda) \Rightarrow \varphi(\lambda)$).

Отметим основные свойства интеграла $I(\varphi)$:

(1) $$I_\Delta(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 I_\Delta(\varphi_1) + \alpha_2 I_\Delta(\varphi_2),$$

(2) $$\| I_\Delta(\varphi) \| \leqslant \sup_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|\, \mathrm{Var}_\Delta \Phi, \tag{25.1}$$

(3) если $\varphi_n(\lambda)$ интегрируемы и $\varphi_n(\lambda) \Rightarrow \varphi(\lambda)$ при $n \to \infty$, то $\varphi(\lambda)$ — также интегрируема и

$$I(\varphi) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n),$$

(4) если $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то $I_\Delta(\varphi) = I_{\Delta_1}(\varphi) + I_{\Delta_2}(\varphi)$; если кроме того, $\varphi(\lambda)$ ограничена, то интеграл $I_\Delta(\varphi)$ есть слабо непрерывная мера ограниченной вариации,

$$\mathrm{Var}_\Delta I(\varphi) = \sup_{|\alpha_k|\leqslant 1,\ \Delta_k \subseteq \Delta} \Big\| \sum_k \alpha_k I_{\Delta_k}(\varphi) \Big\| \leqslant \sup_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|\, \mathrm{Var}_\Delta \Phi.$$

3°. Абстрактная непрерывная мера $\Phi(\Delta)$ взаимно-однозначным образом связана с непрерывной аддитивной функцией $F(\Delta, \Delta')$, $F(\Delta, \Delta') = (\Phi(\Delta), \Phi(\Delta'))$ (см. теорему 1.1),

$$F(\Delta, \Delta') = \overline{(F(\Delta', \Delta)}),$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_k \bar{\alpha}_j F(\Delta_k, \Delta_j) \geqslant 0 \tag{26.1}$$

для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и измеримых множеств Δ_1 $\Delta_2, \ldots, \Delta_m$.

Определим вариацию функции $F(\Delta, \Delta')$ на множестве $\Delta \times \Delta'$ равенством

$$\mathrm{Var}_{\Delta, \Delta'} F = \sup \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k \overline{\beta}_j F(\Delta_k, \Delta_j') \right|, \tag{27.1}$$

где sup берется по всем конечным наборам непересекающихся измеримых множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, $\Delta_k \subseteq \Delta$ и $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n', \Delta_j' \in \Delta'$, и комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $|\alpha_n| \leqslant 1$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, $|\beta_j| \leqslant 1$.

Из (26.1) следует, что

$$\mathrm{Var}_{\Delta, \Delta'} F \leqslant (\mathrm{Var}_{\Delta; \Delta} F)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathrm{Var}_{\Delta', \Delta'} F)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{Var}_{\Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta'} F \leqslant \mathrm{Var}_{\Delta_1, \Delta'} F + \mathrm{Var}_{\Delta_2, \Delta'} F. \tag{28.1}$$

Если $F(\Delta, \Delta')$ имеет ограниченную вариацию,

$$\mathrm{Var}_{R, R} F < \infty, \tag{29.1}$$

то аналогично п. 2° можно определить интеграл

$$I(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \overline{\psi}(\mu) F(d\lambda, d\mu)$$

сначала для «ступенчатых» функций $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ вида (18.1), как

$$I(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k \overline{b}_j F(\Delta_k, \Delta_j'), \tag{30.1}$$

а затем для интегрируемых функций $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ при помощи предельного перехода:

$$I(\varphi, \psi) = \lim_{n, m \to \infty} I(\varphi_n, \psi_m), \tag{31.1}$$

где $\varphi_n(\lambda)$ и $\psi_m(\lambda)$ — некоторые последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(\lambda) \Rightarrow \varphi(\lambda)$, $\psi_m(\lambda) \Rightarrow \psi(\lambda)$.

Сходимость $\varphi_n(\lambda) \Rightarrow \varphi(\lambda)$ означает, что при любом N на множестве $A_N = \{\lambda : |\varphi(\lambda)| \leqslant N\}$ последовательность $\varphi_n(\lambda) \to \varphi(\lambda)$ равномерно, и

$$\int_{R \setminus A_N} \int_{R \setminus A_N} \varphi_n(\lambda) \overline{\varphi_n(\mu)} F(d\lambda, d\mu) \to 0$$

при $N \to \infty$ равномерно по n.

Определенный таким образом интеграл обладает всеми свойствами, аналогичными (25.1).

Заметим, что если $\Phi(\Delta)$ — абстрактная мера, соответствующая функции $F(\Delta, \Delta')$ (см. теорему 1.1), то

$$(I(\varphi), I(\psi)) = I(\varphi, \psi). \tag{32.1}$$

В случае, если обычная вариация $V(F)$ функции $F(\Delta, \Delta')$

$$V(F) = \sup_{\Delta_k, \Delta_j'} \sum_k \sum_j |F(\Delta_k, \Delta_j')| < \infty,$$

наш интеграл $I(\varphi, \psi)$ совпадает с обычным лебеговским.

Назовем аддитивную функцию $F(\Delta, \Delta')$ сильно непрерывной, если для убывающей последовательности множеств Δ_n $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \varnothing$ имеет место

$$\mathrm{Var}_{\Delta_n,\, \Delta_n} F \to 0$$

при $n \to \infty$.

4°. Рассмотрим функцию $x(t)$ действительного переменного, t, $-\infty < t < \infty$ со значениями в H, $x(t) \in H$, такую, что линейное замыкание $H(x)$ элементов $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, сепарабельно.

Функция $x(t)$ называется измеримой, если для любого $h \in H$ числовая функция $(x(t), h)$ измерима; если $x(t)$ измерима, то измерима и числовая функция $\| x(t) \|$ (см. например, [5]).

Измеримая функция $x(t)$ называется интегрируемой на множестве T, если (ср. [4], [5])

$$\int_T \| x(t) \| \, dt < \infty. \tag{33.1}$$

Как показано в [5], если $x(t)$ интегрируема, то существует последовательность «ступенчатых» функций $x_n(t)$, $x_n(t) \in H(x)$, $x_n(t) = x_k$ при $t \in T_{kn} \subseteq T$, сходящаяся к $x(t)$ почти равномерно (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать множество T_0 лебеговой меры $l(T_0) \leqslant \varepsilon$, такое, что $\| x_n(t) - x(t) \| \to 0$ равномерно по t, $t \in T \setminus T_0$ при $n \to \infty$), и такая, что

$$\int_T \| x_n(t) - x_m(t) \| \, dt \to 0 \tag{34.1}$$

при $n, m \to 0$. Если положить

$$\sum_k x_{kn} l(T_{kn}) = \int_T x_n(t) \, dt \tag{35.1}$$

ряд в (35.1) сходится по норме), то предел (по норме)

$$\lim_{n \to \infty} \int_T x_n(t) \, dt = \int_T x(t) \, dt \tag{36.1}$$

называется интегралом функции $x(t)$ (ср. [4], [5]).

Далее, пусть функция $\varphi(\lambda, t)$ измерима по паре переменных (λ, t) и для почти всех t интегрируема по абстрактной мере $\Phi(\Delta)$, $\Phi(\Delta) \in H$. Рассмотрим функцию $x(t)$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t) \, \Phi(d\lambda). \tag{37.1}$$

Функция $x(t)$ измерима, поскольку измерима числовая функция $(x(t), h)$ при любом $h \in H$,

$$(x(t), h) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t) \, F_h(d\lambda), \tag{38.1}$$

и интегрируема на множестве T, если на T интегрируема числовая функция $\| x(t) \|$,

$$\| x(t) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t) \overline{\varphi(\mu, t)} F(d\lambda, d\mu),$$

и

$$h_1 = \int_T x(t)\, dt = \int_T \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t)\, \Phi(d\lambda)\, dt. \tag{39.1}$$

Пусть теперь $\varphi(\lambda, t)$ такова, что функция $\psi(\lambda)$, $\psi(\lambda) = \int_T \varphi(\lambda, t)\, dt$ интегрируема по мере $\Phi(\Delta)$,

$$h_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \varphi(\lambda, t)\, dt\, \Phi(d\lambda). \tag{40.1}$$

Для любого $h \in H$ имеем

$$(h_1, h) = \int_T (x(t), h)\, dt = \int_T \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t)\, F_h(d\lambda)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \varphi(\lambda, t)\, dt F_h(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)\, F_h(d\lambda) = (h_2, h),$$

и потому $h_1 = h_2$, т. е.

$$\int_T \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, t)\, \Phi(d\lambda)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_T \varphi(\lambda, t)\, dt\, \Phi(d\lambda). \tag{41.1}$$

§ 2. Гармонизуемые абстрактные функции

1°. Рассмотрим абстрактную функцию $x(t)$ действительного переменного со значениями в гильбертовом пространстве H. Назовем функцию $x(t)$ гармонизуемой, если ее можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda), \tag{1.2}$$

где $\Phi(\Delta)$ — некоторая абстрактная мера ограниченной вариации со значениями в H; $\Phi(\Delta)$ определена на всех измеримых множествах и сильно непрерывна (сильная непрерывность $\Phi(\Delta)$ означает, что для любой последовательности измеримых множеств Δ_n, $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \varnothing$, при $n \to \infty$ имеет место $\mathrm{Var}_{\Delta_n} \Phi \to 0$).

Рассмотрим некоторые примеры гармонизуемых функций.

Пример 1.2. Функция $x(t)$ — стационарна, т. е. скалярное произведение $(x(t+\tau), x(t)) = B(\tau)$ не зависит от t. В этом случае

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda); \tag{2.2}$$

здесь мера $\Phi(\Delta)$ такова, что

$$(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta \cap \Delta'), \tag{3.2}$$

где $F(\Delta)$ — положительная, ограниченная мера на прямой.

Пример 2.2. Пусть $x(t)$ — стационарная функция,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}P(d\lambda), \tag{4.2}$$

где $P(\Delta)$ — комплексная мера на прямой. Тогда абстрактная функция $y(t) = x(t)\,p(t)$ представима в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\psi(d\lambda), \tag{5.6}$$

где абстрактная мера $\psi(\Delta)$ имеет вид

$$\psi(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Delta - \mu)\,\Phi(d\mu). \tag{6.2}$$

Пример 3.2. Пусть $x(t)$, как и прежде, стационарная функция, имеющая вид (2.2), H_x есть линейное замыкание элементов $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ и A — некоторый линейный оператор из H_x на некоторое подпространство $H_y \subseteq H$.

Рассмотрим функцию $y(t) = Ax(t)$. Имеем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\psi(d\lambda), \tag{7.2}$$

где мера $\psi(\Delta)$ определяется равенством

$$\psi(\Delta) = A\Phi(\Delta),$$

$$\mathrm{Var}_{\Delta}\psi \leqslant \|A\|\,\mathrm{Var}_{\Delta}\Phi = \|A\|\,F(\Delta), \tag{8.2}$$

$F(\Delta)$ — положительная мера на прямой, определяемая соотношением (3.2).

Теорема 1.2*. *Для того, чтобы абстрактная функция $x(t)$, $x(t) \in H$, была гармонизуема, т. е. чтобы ее можно было представить в виде* (1.2). *необходимо и достаточно, чтобы числовую функцию $B(u, v) = (x(u), x(v))$ можно было представить в виде*

$$B(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda u - \mu v)}\,F(d\lambda d\mu), \tag{9.2}$$

* Ср. [10].

причем $(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta, \Delta')$, $\Phi(\Delta) \in H(x)$ *(где* $F(\Delta, \Delta')$ *— сильно непрерывная аддитивная функция, описанная в* п. 3° § 1).

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим пространство L функций $\varphi(\lambda)$, для которых существует

$$I(\varphi, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\varphi(\mu)}\,F(d\lambda, d\mu). \qquad (10.2)$$

Определим на L скалярное произведение $(\varphi, \psi) = I(\varphi, \psi)$ и отождествим все функции φ, ψ, для которых $\|\varphi - \psi\| = 0$, $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$.

Определим отображение T из пространства L в $H(x)$ равенством $Te^{i\lambda t} = x(t)$. Оно изометрично:

$$(Te^{i\lambda u}, Te^{i\lambda v}) = B(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda u - \mu v)}\,F(d\lambda, d\mu) = (e^{i\lambda u}, e^{i\lambda v}).$$

Благодаря сильной непрерывности $F(\Delta, \Delta')$ (см. п. 3° § 1), характеристические функции $\chi_\Delta(\lambda)$ полуинтервалов $\Delta = [\lambda_1, \lambda_2)$ можно аппроксимировать линейными комбинациями $\sum_k a_k e^{i\lambda t_k}$. Поэтому отображение T можно продолжить с сохранением изометричности на характеристические функции $\chi_\Delta(\lambda)$, $\Delta \in \mathfrak{S}$. Положим $\Phi(\Delta) = T\chi_\Delta(\lambda)$. Мера $\Phi(\Delta)$ является непрерывной мерой ограниченной вариации, $(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta, \Delta')$, определенной на $\mathfrak{S}$. По теореме 1.1 ее можно продолжить на все измеримые множества, при этом

$$(\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')) = F(\Delta, \Delta') \qquad (11.2)$$

для любых измеримых множеств Δ и Δ'.

Из сильной непрерывности функции $F(\Delta, \Delta')$ и соотношения (11.2) следует сильная непрерывность и самой меры $\Phi(\Delta)$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $x(t)$ *— гармонизуемая функция,*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda).$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-i\lambda_0 t}dt = \Phi(\lambda_0),$$

$$\lim_{T_1, T_2\to\infty} \frac{1}{T_1 T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} B(u, v)\,e^{-i(\lambda_0 u - \mu_0 v)}du\,dv = F(\lambda_0, \mu_0). \qquad (12.2)$$

Доказательство. Из п. 4° § 1 вытекает, что функция $x(t)e^{-i\lambda_0 t}$ интегрируема на каждом конечном интервале, и

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-i\lambda_0 t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda-\lambda_0)t}dt\,\Phi(d\lambda).$$

Пусть $\chi_{\lambda_0}(\lambda) = 1$ при $\lambda = \lambda_0$, $\chi_{\lambda_0}(\lambda) = 0$ при $\lambda \neq \lambda_0$. Имеем

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\lambda_0 t} dt - \Phi(\lambda_0) \right\| =$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda-\lambda_0)t} dt - \chi_{\lambda_0}(\lambda) \right] \Phi(d\lambda) \right\| \leqslant \left\| \int_{|\lambda-\lambda_0|\geqslant\varepsilon} \left[\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda-\lambda_0)t} dt \right] \Phi(d\lambda) \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon} \left[\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda-\lambda_0)t} dt \right] \Phi(d\nu) \right\| \leqslant \frac{2}{T\varepsilon} \operatorname{Var} \Phi + \operatorname{Var}_{\Delta_\varepsilon} \Phi$$

при любых T и $\varepsilon > 0$, $\Delta_\varepsilon = \{\lambda\colon 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Поскольку $\bigcap_\varepsilon \Delta_\varepsilon = \varnothing$, то $\operatorname{Var}_{\Delta_\varepsilon} \Phi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и, выбирая $\varepsilon = T^{-\frac{1}{2}}$, получаем

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\lambda_0 t} dt - \Phi(\lambda_0) \right\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{T}} \operatorname{Var} \Phi + \operatorname{Var}_{\Delta_T - \frac{1}{2}} \Phi \to 0$$

при $T \to \infty$, и тем более,

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} B(u, v) e^{-i(\lambda_0 u - \mu_0 v)} du dv =$$

$$= \left(\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(u) e^{-i\lambda_0 u} du,\ \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} x(v) e^{-i\mu_0 v} dv \right) \to (\Phi(\lambda_0), \Phi(\mu_0)) = F(\lambda_0, \mu_0),$$

что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично устанавливается

Теорема 3.2. *Пусть $x(t)$ — гармонизуемая функция,*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda),$$

и интервал $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ таков, что $\Phi(\lambda_1) = \Phi(\lambda_2) = 0$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\lambda_2 t} - e^{-i\lambda_1 t}}{-it} x(t)\, dt = \Phi(\Delta). \tag{13.2}$$

Если $\Delta' = (\lambda_1', \lambda_2')$, $\Phi(\lambda_1') = \Phi(\lambda_2') = 0$, то

$$\lim_{T_1, T_2 \to \infty} \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} \frac{e^{-i\lambda_2 u} - e^{-i\lambda_1 u}}{-iu} \cdot \frac{e^{+i\lambda_2' v} - e^{+i\lambda_1' v}}{iv} B(u, v)\, du dv = F(\Delta, \Delta').$$

2°. Пусть $x(t)$ — гармонизуемая функция,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi(d\lambda).$$

Назовем линейной операцией A_φ оператор, ставящий в соответствие функции $x(t)$ функцию

$$y(t) = A_\varphi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda). \tag{14.2}$$

Пример 4.2. Оператором такого типа является линейная операция «скользящего суммирования»:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t+t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k e^{i\lambda t_k}\right)\Phi(d\lambda).$$

Пример 5.2. Пусть $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\widetilde{\varphi}(t)\,dt$, где $\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(t)|\,dt < \infty$.

Поскольку

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\mu)t}\,F(d\lambda, d\mu) \leqslant \mathrm{Var}_{R,R}F, \tag{15.2}$$

то функция $x(t+t_0)\widetilde{\varphi}(t)$ интегрируема и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+\tau)}\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau\right]\Phi(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+\tau)}\,\Phi(d\lambda)\right]\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,x(t+\tau)\,d\tau.$$

Оператор A_φ имеет вид:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\tau - t)\,x(\tau)\,d\tau. \tag{16.2}$$

Пример 6.2. Пусть функция $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi(d\lambda)$ имеет производную $x'(t)$, т. е.

$$\left\| x'(t) - \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}\right\| \to 0 \tag{17.2}$$

при $\varepsilon \to 0$. Положим

$$y_\varepsilon(t) = \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}, \quad \varphi_\varepsilon(\lambda) = \frac{e^{i\lambda\varepsilon} - 1}{\varepsilon}.$$

Из (17.2) следует, что

$$\| y_{\varepsilon_1} - y_{\varepsilon_2} \| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} [\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda) - \varphi_{\varepsilon_2}(\lambda)] \Phi(d\lambda) \right\| \to 0$$

и так как при любом Λ

$$\left\| \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\lambda t} [\varphi_{\varepsilon_1}(t) - \varphi_{\varepsilon_2}(\lambda)] \Phi(d\lambda) \right\| \leqslant \sup_{|\lambda| \leqslant \Lambda} | \varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2}(\lambda) | \operatorname{Var} \Phi \to 0$$

при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, то

$$\left\| \int_{|\lambda| > \Lambda} e^{i\lambda t} [\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda) - \varphi_{\varepsilon_2}(\lambda)] \Phi(d\lambda) \right\| \to 0$$

при $\Lambda \to \infty$ равномерно по ε и, таким образом,

$$e^{i\lambda t} \varphi_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{e^{i\lambda(t+\varepsilon)} - e^{i\lambda t}}{\varepsilon} \Rightarrow i\lambda e^{i\lambda t},$$

откуда следует, что функция $i\lambda e^{i\lambda t}$ интегрируема и

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda). \tag{18.2}$$

Верно, конечно, и обратное: если $\frac{e^{i\lambda(t+\varepsilon)} - e^{i\lambda t}}{\varepsilon} \to i\lambda e^{i\lambda t}$, то функция $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$ имеет сильную производную $x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$. Таким образом, линейной операцией A_φ соответствующей функции $\varphi = i\lambda$ является оператор дифференцирования.

§ 3. Спектр абстрактной функции

1°. Пусть $x(t)$ — абстрактная функция действительного переменного t, $-\infty < t < +\infty$, со значениями в гильбертовом пространстве H.

Будем говорить, что функция $x(t)$ обладает спектром (ср. [7], [8]), если числовая функция $\| x(t) \|^2$ интегрируема в каждом конечном интервале и существует

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t+\tau);\ x(t))\, dt = B(\tau) \tag{1.3}$$

при всех τ, причем функция $B(\tau)$ непрерывна.

Пусть $x(t)$ обладает спектром. Функция $B(\tau)$ положительно определена,

$$\sum_{k,j=1}^{m} B(\tau_k - \tau_j)\, \alpha_k \overline{\alpha_j} \geqslant 0 \tag{2.3}$$

для любых $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ и комплексных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, так как

$$\sum_{k,j=1}^{m} B(\tau_k - \tau_j)\alpha_k\bar{\alpha}_j = \lim_{T\to\infty} \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_k\bar{\alpha}_j \frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau_k-\tau_j), x(t))\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_k\bar{\alpha}_j \frac{1}{T}\int_{-\tau_j}^{T-\tau_j} (x(t+\tau_k), \quad x(t+\tau_j))\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x(t+\tau_k) \right\|^2 dt \geqslant 0.$$

Благодаря положительной определенности, функцию $B(\tau)$ можно представить в виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda), \tag{3.3}$$

где $F(\Delta)$ — положительная ограниченная мера; будем называть $F(\Delta)$ спектральной мерой (спектром) функции $x(t)$.

Пример 1.3. Пусть $x(t)$ — стационарная функция, $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda)$. В том случае $B(\tau) = (x(t+\tau), x(t))$, а спектральная мера $F(\Delta)$ есть

$$F(\Delta) = \|\Phi(\Delta)\|^2. \tag{4.3}$$

Пример 2.3. Пусть $x(t)$ — гармонизуемая функция, $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda)$, причем * обычная вариация $V(F)$ функции $F(\Delta, \Delta')$,

$$V(F) = \sup_{\Delta_k,\ \Delta_j'} \sum_{k,j} |F(\Delta_k, \Delta_j')| < \infty,$$

$$F(\Delta, \Delta') = (\Phi(\Delta), \Phi(\Delta')). \tag{5.3}$$

В этом случае $F(\Delta, \Delta')$ продолжается в меру на плоскости. Имеем (ср. [9])

$$\frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau), x(t))\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}e^{i(\lambda-\mu)t} F(d\lambda, d\mu)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda-\mu)t}\,dt\,F(d\lambda, d\mu) \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}F(d\lambda, d\lambda),$$

т. е. функция $x(t)$ имеет спектр, причем спектральная мера $F(\Delta)$ есть

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} F(d\lambda, d\lambda). \tag{6.3}$$

* Если условие (5.3) не выполнено, то гармонизуемая функция $x(t)$ может и не иметь спектра в смысле определения (1.3).

2°. Пусть функция $x(t)$ обладает спектром $F(\Delta)$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau),\, x(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}F(d\lambda). \tag{7.3}$$

Рассмотрим функцию $y(t)$,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(t+\tau_k). \tag{8.3}$$

Легко видеть, что функция $y(t)$ также обладает спектром $G(\Delta)$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (y(t+\tau),\, y(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\lambda\tau_k}\right|^2 F(d\lambda),$$

$$G(\Delta) = \int_{\Delta}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\lambda\tau_k}\right|^2 F(d\lambda). \tag{9.3}$$

Пусть $\|x(t)\|$ равномерно ограничена. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\tau - t)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{10.3}$$

где числовая функция $\widetilde{\varphi}(t)$ такова, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(t)|\,dt < \infty$, и $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\widetilde{\varphi}(t)dt$ интегрируема в квадрате по $F(\Delta)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty$.

Имеем

$$\frac{1}{T}\int_0^T (y(t+\tau),\, y(t))\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(u)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\widetilde{\varphi}(v)}\,(x(t+\tau+u),\, x(t+v))\,dudvdt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(u)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\widetilde{\varphi}(v)}\,\frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau+u),\, x(t+v))\,dtdudv,$$

и так как при $T\to\infty$ функции $\psi_T(u,v) = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau+u),\ x\ (t+v))\,dt \to$

$\to \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau+u-v)}\,F(d\lambda)$ при каждом (u, v) и, кроме того, равномерно ограничены, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(u)\overline{\widetilde{\varphi}(v)}\,\psi_T(u,v)\,dudv \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(u)\overline{\widetilde{\varphi}(v)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau+u-v)}\,F(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u}\widetilde{\varphi}(u)\,du\right|^2 F(d\lambda),$$

и, таким образом,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (y(t+\tau), y(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\,|\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda), \tag{11.3}$$

т. е. функция $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\tau - t)\,x(\tau)\,d\tau$ обладает спектром $G(\Delta)$

$$G(\Delta) = \int_{\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda). \tag{12.3}$$

3°. В спектральной теории стационарных функций наиболее важным представляется вопрос о линейной экстраполяции (см., например, [1]), т. е. вопрос о возможности линейной аппроксимации значения функции $x(t)$ в моменты времени $t > \tau$ по значениям $x(t)$ при $t \leqslant \tau$.

Точно это означает следующее. Пусть H_τ^- есть линейное замыкание элементов $x(t)$, $-\infty < t \leqslant \tau$ и $\hat{x}_\tau(t) = P_\tau x(t)$, где P_τ — оператор проектирования на H_τ^-. Элемент $\hat{x}_\tau(t)$ дает наилучшее линейное приближение значения функции $x(t)$ в момент $t > \tau$ по значениям $x(t)$ при $t \leqslant \tau$,

$$\|x(t) - \hat{x}_\tau(t)\| = \min_{h\in H_\tau} \|x(t) - h\| = \sigma_{t-\tau}^2. \tag{13.3}$$

Задача экстраполяции и состоит в нахождении элементов $\hat{x}_\tau(t)$ (см., например, [1], [2]).

Если $x(t)$ — стационарная функция, то функция $\hat{x}_{t-\tau}(t)$ от t ($\tau = \text{const}$) удовлетворяет условию

$$\inf_{y(t)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|x(t) - y(t)\|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x(t) - \hat{x}_{t-\tau}(t)\|^2\,dt, \tag{14.3}$$

где inf берется по всем функциям $y(t)$ вида

$$y(t) = \sum_{\tau_k \geqslant \tau} c_k x(t - \tau_k). \tag{15.3}$$

Пусть теперь $x(t)$ произвольная, обладающая спектром функция,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (x(t+\tau), x(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda). \tag{16.3}$$

Будем называть функцию $y(t)$ стационарным приближением для $x(t)$ с запаздыванием τ, если $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-\tau} \widetilde{\varphi}(u - t)\,x(u)\,du + \sum_{\tau_k \geqslant \tau} c_k x(t - \tau_k), \tag{17.3}$$

где числовая функция $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\varphi}(t) = 0$ при $t > 0$, удовлетворяет условиям, сформулированным после соотношения (10.3).

Рассмотрим среднее отклонение $\sigma_\tau^2(y)$,

$$\sigma_\tau^2(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \| x(t) - y(t) \|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau} - \varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda), \qquad (18.3)$$

где $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\tau} e^{i\lambda t} \overline{\varphi}(t)\, dt + \sum_{\tau_k \geqslant \tau} c_k e^{-i\lambda\tau_k}$.

В силу соотношения (18.3), среднее отклонение $\sigma_\tau^2(y)$ заключено в пределах

$$0 \leqslant \sigma_\tau^2(y) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} F(d\lambda). \qquad (19.3)$$

Положим

$$\sigma_\tau^2 = \inf_{y(t)} \sigma_\tau^2(y) = \inf_{\varphi(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau} - \varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda). \qquad (20.3)$$

Заметим, что если $\sigma_\tau^2 = 0$ при некотором $\tau = \tau_0 > 0$, то $\sigma_\tau^2 \equiv 0$, при всех τ. Действительно, в силу монотонности $\sigma_\tau^2 = 0$ при $\tau \leqslant \tau_0$; если $\varepsilon > 0$ произвольно малое, и $\varphi(\lambda) = \sum_{\tau_k \geqslant \tau_0} c_k e^{-i\lambda\tau_k}$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau_0} - \varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) \leqslant \varepsilon,$$

то при $\tau_1 \leqslant 2\tau_0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\lambda\tau_1} - e^{i\lambda(\tau_0 - \tau_1)} \sum_{\tau_k \geqslant \tau_0} c_k e^{-i\lambda\tau_k} \right|^2 F(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau_0} - \varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) \leqslant \varepsilon$$

и, следовательно, $\sigma_{\tau_1}^2 \leqslant \varepsilon$, $\sigma_{\tau_1}^2 = 0$ и т. д.

Назовем функцию $x(t)$ сингулярной, если $\sigma_\tau^2 = 0$ при $\tau > 0$ (ср. [1]), и регулярной, если $\sigma_\tau^2 \to \int_{-\infty}^{\infty} F(d\lambda)$ при $\tau \to \infty$.

Из [2] вытекает, что функция $x(t)$ сингулярна тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty \qquad (21.3)$$

(здесь $f(\lambda) = \frac{F(d\lambda)}{d\lambda}$, и интеграл в (21.3) в случае, когда $f(\lambda) = 0$ на множестве положительной меры, равен $-\infty$ по определению).

Аналогично, для регулярности функции $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы спектральная мера $F(\Delta)$ была абсолютно непрерывна и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty. \tag{22.3}$$

Наименьшее среднее отклонение σ_τ^2 имеет вид

$$\sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau} - \varphi_0(\lambda)|^2 F(d\lambda), \tag{23.3}$$

где функция $\varphi_0(\lambda)$ есть граничное значение аналитической функции $\Gamma(z)$ $z = \lambda + i\nu$, $\nu \to 0$,

$$\Gamma(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\mu)}{1+\mu^2}\frac{1-\mu z}{z-\mu} d\mu\right\}. \tag{24.3}$$

В случае, когда выполнено (22.3), но спектральная мера $F(\Delta)$ не абсолютно непрерывна,

$$\lim_{\tau\to\infty} \sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{25.3}$$

Заметим, что $\inf\limits_y \sigma_\tau^2(y)$ может и не достигаться, но из (23.3) и (24.3) легко найти минимизирующую последовательность функции $y(t)$ вида (17.3).

Пример 3.3. Пусть функция $x(t)$ обладает абсолютно непрерывным спектром $F(\Delta)$, $f(\lambda) = \frac{1}{a^2+\lambda^2}$.

Тогда $\inf\limits_y \sigma_\tau^2(y)$ достигается на функции $y(t)$ вида

$$y(t) = e^{-a\tau} x(t-\tau). \tag{26.3}$$

Поступила в редакцию
5.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, **2**, № 6 (1941), 1—40.
[2] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, **46** (1944), 306—309.
[3] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, Москва, 1956.
[4] И. М. Гельфанд, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Мат. сбор., **4** (46), (1938), 235—285.
[5] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, Москва, 1951.
[6] N. Wiener, Integral Fourier, 1932.
[7] S. Bochner, Montone Functionen, Stieltjessche Integrale und harmonishe Analyse, Math. Ann., **108** (1933).
[8] Халмош, Теория меры, ИЛ, Москва, 1953.
[9] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
[10] H. Cramer, A contribution to the theory of stochastic processes, Proc. Soc. Berkeley Symp. Math. Statistic and Prob., Berkeley, (1951), 329—339.

[11] K. Karhunen, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math. Phys., **37** (1947), 3—79.
[12] S. Bochner, Fourier transforms of time series, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **39**, 4 (1953), 302—307.
[13] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley, Calif, Univ. Press., London, Cambridge Univ. Press, 1955.

SPECTRAL ANALYSIS OF ABSTRACT FUNCTIONS

Yu. A. ROSANOV

(Summary)

In this paper a spectral theory is developed for abstract functions similar to the well-known spectral theory for stationary random processes.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том IV Выпуск 3
1959

Ю. В. ЛИННИК

ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ В УСЛОВИЯХ ЛИНДЕБЕРГА

0. В настоящей работе предлагается новое доказательство центральной предельной теоремы, основанное на теоретико-информационных свойствах суммирования случайных величин.

Доказательство использует лишь элементарные средства анализа, однако, по существу основывается на некоторых связях между информационными количествами К. Шеннона и Р. Фишера, и в этом отношении может представить самостоятельный интерес.

1. Рассмотрим класс $\mathfrak{X}$ одномерных случайных величин X, имеющих непрерывную плотность вероятности $p(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\sup_x p(x) < \infty; \quad \mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = 0; \quad \mathbf{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx < \infty. \tag{1.1}$$

Рассмотрим информационный функционал $I(X)$, определяемый соотношением

$$I(X) = -\Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln p(x)\,dx + \frac{1}{2}\ln\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx\Big). \tag{1.2}$$

Далее будет доказано, что $I(X)$ всегда существует в классе $\mathfrak{X}$. Мы будем для краткости называть его энтропией случайной величины X. Мы видим, что первое слагаемое (1.2) совпадает с энтропией непрерывного распределения, введенного К. Шенноном ([1], гл. III, п. 19), второй же член равен $\frac{1}{2}\ln \boldsymbol{D}(X)$. Для нормальной плотности $q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, энтропия по Шеннону равна $\ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$, так что (с точностью до постоянного слагаемого), $I(X)$ есть разность энтропий по Шеннону для X и для нормальной случайной величины с той же дисперсией. Эта разность, как мы увидим далее, обладает определенными преимуществами по сравнению с энтропией по Шеннону *.

Лемма 1. *Пусть* $\sup_x p(x) = L$; $\mathbf{D}(X) = \sigma^2$. *Тогда* $I(X)$ *существует*

* Как известно, последний вид энтропии для непрерывного распределения по существу не может обладать желательными для количества информации свойствами, как для конечной схемы. В конце статьи будет указан другой путь доказательства, еще более близкий к теории информации.

(*интегралы в (1.2) абсолютно сходятся*), *и*

$$-|\ln L| - \ln\sigma \leqslant I(X) \leqslant \sigma^2 - \ln\sigma + C_1 \tag{1.3}$$

(*в дальнейшем* $C_1 C_2, \ldots$ — *абсолютные константы*).

Левое неравенство здесь тривиально, правое же немедленно следует из разбиения множества $\underset{x}{E}(p(x) \leqslant 1)$ на множества

$$\underset{x}{E}(1 \geqslant p(x) > e^{-x^2}) \text{ и } \underset{x}{E}(p(x) \leqslant e^{-x^2}).$$

Лемма 2. *Энтропия инвариантна относительно гомотетического преобразования, т. е. при любом* $\alpha > 0$,

$$I(\alpha X) = I(X). \tag{1.4}$$

Доказательство тривиально: при подстановке в (1.2) вместо $p(x)$ величины $\frac{1}{\alpha} p\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, непосредственно приходим к (1.4). Мы можем теперь дополнить неравенства (1.3): если в (1.4) выбрать α_0 так, чтобы $\sigma = 1$, то при этом будет $L' = \frac{1}{\alpha_0} L$ и из (1.3) находим:

$$-\left|\ln\frac{L}{\alpha_0}\right| \leqslant I(X) \leqslant C_1 + 1. \tag{1.5}$$

2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$, — последовательность случайных величин с интегральными законами распределения $F_j(x)$, причем $\mathbf{E}X_j = 0$; $0 < \mathbf{D}(X_j) = b_j < \infty$; $b_1 + b_2 + \ldots + b_m = B_m$. Пусть выполняется условие Линдеберга: при любом $\tau > 0$, и любом $\zeta > 0$

$$\frac{1}{B_m} \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B_m}} x^2 dF_j(x) < \zeta, \tag{2.1}$$

если $m > m_0(\tau, \zeta)$. В этих условиях надлежит доказать, что:

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} < x\right) - G(x)\right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

при любом $\varepsilon > 0$, любых x, и $m > m_1(\varepsilon)$. Здесь $S_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. У такой суммы, вообще говоря, не будет существовать энтропии, и поэтому мы должны заменить ее другой. Сперва сделаем замену величин X_j на срезанные по следующему правилу: выбираем большое число T_0, которое будет фиксировано в дальнейшем, и полагаем: $X'_j = X_j$, если $|X_j| \leqslant T_0\sqrt{B_j}$; $X'_j = 0$, если $|X_j| > T_0\sqrt{B_j}$. Пусть $S'_m = \sum\limits_{j<m} X'_j$ и $B'_m = \mathbf{D}(S'_m)$; тогда можно утверждать, что $\left(\frac{S'_m}{\sqrt{B'_m}} < x\right)$ и $\mathbf{P}\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} < x\right)$ будут равномерно по x сколь угодно близки при достаточно большом T_0 и больших m. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим числа $m_0 = m, m_1 < m_0, m_2 < m_1, m_3 < m_2, \ldots$ такие, что $B_{m_{l+1}} \sim \frac{1}{2} B_{m_l}$ ($\sim$ знак асимптотической эквивалентности). Мы можем выбрать k так, что $\mathbf{D}(S'_m$

$\sim \frac{1}{2^k} B_m$ достаточно мала сравнительно с B_m, и фиксировать это k. Затем замечаем, что при $m_k \leqslant j \leqslant m$ вероятность того, что, хотя бы для одного j, $|X_j| > T_0 \sqrt{B_j}$ не превосходит $\sum_{j=m_k}^{m} \frac{b_j}{T_0^2 B_j} \leqslant C_2 \frac{2^k}{T_0^2}$; при достаточно большом T_0 это сколь угодно мало, и наше утверждение обосновано. Далее, легко заметить, что условие Линдеберга типа (2.1) будет удовлетворяться для урезанных величин X_j'. Мы должны еще сгладить S_j', чтобы у нее появилась энтропия. Для этого употребим вариант известного приема А. М. Ляпунова: к каждому слагаемому X_j' добавим нормальное слагаемое y_j' с $\mathbf{E}y_j' = -\mathbf{E}X_j'$ и дисперсией $\delta_0^2 b_j'$, где δ_0 сколь угодно малая, но фиксированная константа. Полагая $X_j'' = X_j' + y_j'$, заметим, что $\mathbf{E}X_j'' = 0$; для X_j'' будут удовлетворяться условия Линдеберга; у суммы $S_m'' = \sum_{j \leqslant m} X_j''$ будет существовать энтропия. Если распределение $\frac{S_m''}{\sqrt{B_m''}}$ достаточно близко к нормальному ($B_m'' = \mathbf{D}(S_m'')$), то это же верно и для сумм $\frac{S_m'}{\sqrt{B_m'}}$ и $\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}$.

3. Для упрощения записи переобозначим X_j'' в X_j; S_m'' в S_m. Имеем: $I(S_m) = I\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}\right)$. Из (1.4) легко усматриваем, что для всех m:

$$-C(\delta_0) \leqslant I(S_m) \leqslant C_3, \tag{3.1}$$

где $C(\delta_0)$ — константа, зависящая только от δ_0.

Для дальнейшего будем рассматривать для случайных величин $X \in \mathfrak{X}$ также энтропию по Шеннону:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x)\, dx.$$

Таким образом, имеем:

$$I(X) = H(X) - \frac{1}{2} \ln \mathbf{D}(X). \tag{3.2}$$

Укажем теперь схему дальнейших рассуждений. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; $\eta_1, \eta_2, \ldots$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — малые положительные числа, выбираемые каждое в соответствии с предыдущими; B — ограниченное число $|B| \leqslant C$, где C абсолютная константа. Если $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta)$ задано, то будем говорить, что для X_j условие Линдеберга выполняется индивидуально при $j \leqslant n$, если:

$$\int_{|x| > \tau \sqrt{B_n}} x^2 dF_j(x) < \zeta_1 b_j. \tag{3.3}$$

Если выберем, например, $\zeta_1 = \sqrt{\zeta}$, то из (2.1) замечаем: для тех j, для которых (3.3) не выполняется, должны иметь:

$$\sum' b_j \leqslant \zeta_1 B_n, \tag{3.4}$$

т. е. подобные X_j будут иметь в совокупности относительно малую дисперсию. Далее мы вычисляем при $m > M_0$ приращение $I(S_{m+1}) - I(S_m)$. Пусть $\sigma_{m+1} = \sqrt{\frac{b_{m+1}}{B_m}}$.

Подробный расчет показывает, что:

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = \frac{\sigma^2_{m+1}}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx - 1\right) + B\mu\sigma^2_{m+1}. \tag{3.5}$$

Здесь $p_m(x)$ — плотность для $\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}$, а $\mu = \tau$, если «индивидуальное условие Линдеберга» (3.3) выполняется для X_{m+1}, и $\mu = 1$, если оно не выполняется.

Выражение

$$F_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx - 1 \tag{3.6}$$

для всех m неотрицательно: $F_m \geqslant 0$. При этом чем ближе F_m к 0, тем ближе $p_m(x)$ к

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{3.7}$$

равномерно по x.

Грубо говоря, это поясняет теоретико-информационный смысл условий Линдеберга: если для X_{m+1} оно выполняется «индивидуально», то на $(m+1)$ шаге энтропия суммы возрастает пропорционально σ^2_{m+1}, либо сумма весьма близка к нормальной. Для тех же X_{m+1}, где условие Линдеберга не выполняется индивидуально, энтропия суммы может и не возрастать, а сумма не обязана быть при этом близкой к нормальной.

Заметим, что числа F_m имеют вполне определенный статистический смысл; они тесно связаны с информационным количеством Фишера, известным в математической статистике. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_m(x)\,dx = 0; \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_m(x)\,dx = 1. \tag{3.8}$$

Рассмотрим класс плотностей $\{p_m(x-\theta)\}$ со средним θ и дисперсией 1. Наблюдение x_1, с плотностью $p_m(x-\theta)$ будет несмещенной оценкой θ, с дисперсией 1. Поэтому, в силу неравенств Рао—Крамера:

$$1 \geqslant \frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln p_m(x-\theta)}{\partial\theta}\right)^2}.$$

Это равносильно неравенству $F_m \geqslant 0$. Разумеется, подобное неравенство может быть выведено и совершенно элементарно.

4. Впредь будем считать $m > M_0$, где M_0 — столь большая константа, как это понадобится далее. Будем рассматривать прирост энтропии $I(S_{m+1}) - I(S_m)$. Мы увидим, что если количества F_m не очень малы, то из выполнения условия Линдеберга будет следовать возрастание энтропии уже при относительно небольших приращениях B_m. Но $I(S_m)$ ограничена

сверху, так что F_m не могут быть все не очень малыми, откуда и будет следовать близость распределения $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ к нормальному.

Имеем:

$$I(S_{m+1}) = I\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = I\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} + \frac{X_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right). \tag{4.1}$$

Обозначим $x_{m+1} = \frac{X_{m+1}}{\sqrt{B_m}}$; $\mathbf{D}(x_{m+1}) = \frac{b_{m+1}}{B_m} = \sigma^2_{m+1}$;

плотность для $\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}$ — через $p_m(x)$, плотность для $\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}$ — через $\pi_{m+1}(x)$. Пусть еще $Q_{m+1}(t)$ — плотность для X_{m+1}; $q_{m+1}(t) = \sqrt{B_m}\, Q(t\sqrt{B_m})$ — плотность для x_{m+1}. Имеем:

$$\pi_{m+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x-t)\, q_{m+1}(t)\, dt, \tag{4.2}$$

$$-H\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{m+1}(x) \ln \pi_{m+1}(x)\, dx. \tag{4.3}$$

Расчет последнего выражения потребует некоторых подробных оценок $p_m(x)$ и ее производных; главные трудности вызываются наличием здесь члена $\ln \pi_{m+1}(x)$.

Перейдем к соответствующим оценочным леммам.

Заметим, что $p_m(x)$ подчиняется условиям (3.8). Далее, вспоминая происхождение величин X''_j, переобозначенных в X_j, из величин X'_j и нормальных добавок, и, обозначая $V_m(x) = \mathbf{P}\left(\frac{S''_m}{\sqrt{B_m}} < x\right)$, заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dV_m(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dV_m(x) = \frac{1}{1+\delta_0^2}. \tag{4.4}$$

Последняя величина заключена между $\frac{4}{5}$ и 1, при всех m, если $\delta_0 < \frac{1}{2}$, что будем полагать.

Лемма 3. *При фиксированном* δ_0 *и* $k = 0, 1, 2, 3$ *и любых* z *имеем:*

$$p_m(x) < C_4; \quad p_m^{(k)}(x) = B p_m(x) \left(\ln \frac{1}{p_m(x)}\right)^{k/2}, \tag{4.5}$$

$$p^{(k)}(x-z) = B p_m(x) \exp\left(C_5 |z| \sqrt{\ln \frac{1}{p_m(x)}}\right). \tag{4.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$p_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{2\delta_0^2}\right] dV_m(t). \tag{4.7}$$

Отсюда сразу следует первое из соотношений (4.5). Далее, обозначим: $\rho(x) = 8\sqrt{\ln \frac{1}{p_m(x)}}$ и разобьем (4.7) на $I_1(x) = \int\limits_{|t| \leqslant \rho(x)}$ и $I_2(x) = \int\limits_{|t| > \rho(x)}$.

Легко заметить, что

$$I_2(x) = B(p_m(x))^{32}; \quad \frac{d^k I_2(x)}{dx^k} = B(p_m(x))^{16}. \tag{4.8}$$

Отсюда, в частности, $p_m(x) = BI_1(x)$; $p_m^{(k)}(x) = B(|I_1^{(k)}(x)| + p_m(x))$, что и дает вторую часть (4.5). В (4.5) возьмем сначала $k = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $p_m(x-z) \geqslant p_m(x)$; отсюда, в силу предыдущего:

$$p_m(x-z) = B \int\limits_{|t| \leqslant \rho(x-z)} \exp\left[-\frac{(x-z-t)^2}{2\delta_0^2}\right] dV_m(t) =$$

$$= B \int\limits_{|t| \leqslant \rho(x)} \exp\left[-\frac{(x-z-t)^2}{2\delta_0^2}\right] dV_m(t). \tag{4.9}$$

Положим $\mathbf{E}(\xi) = \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\delta_0^2}\right]$; тогда

$\mathbf{E}(x-z-t) = \exp\left\{-\frac{1}{2\delta_0^2}[(x-t)^2 + z^2 - 2z(x-t)]\right\}$. Отсюда имеем:

$$\mathbf{E}(x-z-t) = B\mathbf{E}(x-t)\exp(C_5|z|\sqrt{\ln \mathbf{E}(\rho(x))}).$$

Подставляя это в (4.9), находим требуемую оценку (4.6) при $k = 0$. Аналогично действуем при $k = 1, 2, 3$, беря $\left|\frac{d^k}{dx^k}\mathbf{E}(x-z-t)\right|$.

Лемма 4. *При заданном* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$, *имеем:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (p_m(x))^{1-\varepsilon}\, dx < C(\varepsilon). \tag{4.10}$$

Для доказательства используем (3.8) и первое из соотношений (4.5). Разбивая множество $E_x(p_m(x) \leqslant 1)$ на $E_x\left(p_m(x) < \frac{1}{1+x^2}\right)$ и $E_x\left(1 > p_m(x) \geqslant \frac{1}{1+x^2}\right)$, непосредственно выводим (4.10).

Непосредственным следствием из (4.10) будет: при любом $T_1 > 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_m(x) \exp\left(C_5 T_1 \sqrt{\ln \frac{1}{p_m(x)}}\right) dx < C(T_1), \tag{4.11}$$

где $C(T_1)$ зависит только от T_1.

5. Мы можем теперь начать подсчет прироста энтропии $I(S_m)$.

Обратимся к (4.2) и (4.3). Для упрощения записи переобозначим $Q_{m+1}(t)$, $q_{m+1}(t)$, σ_{m+1}^2 в $Q(t)$, $q(t)$, σ^2.

Пусть τ — заданное малое число, входящее в условие Линдеберга (2.1). Интеграл в правой части (4.2) разобьем на $\int\limits_{|t| \leqslant \tau} + \int\limits_{|t| > \tau}$. При $|t| \leqslant \tau$, имеем:

$$p_m(x-t) = p_m(x) - tp_m'(x) + \frac{t^2}{2}p_m''(x) + \frac{t^3}{6}p_m'''(x-\theta t), \tag{5.1}$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Применяя (4.6), найдем:

$$\int\limits_{|t|\leqslant\tau} p_m(x-t)\,q(t)\,dt = \int\limits_{|t|\leqslant\tau} q(t)\,dt\left(p_m(x) - tp'_m(x) + \frac{t^2}{2}p''_m(x)\right) + \tau\sigma^2 R_1(x), \tag{5.2}$$

где

$$R_1(x) = Bp_m(x)\exp\left(C_5\rho(x)\right) \tag{5.3}$$

и, как и ранее,

$$\rho(x) = 8\sqrt{\ln\frac{1}{p_m(x)}}.$$

При $|t|>\tau$ берем ряд Тейлора в форме:

$$p_m(x-t) = p_m(x) - tp'_m(x) + \frac{t^2}{2}p''_m(x) + \int\limits_0^t p'''_m(x-\xi)\,\xi d\xi. \tag{5.5}$$

Интегрируя по $|t|>\tau$, объединяя с (5.2) и учитывая (3.8), найдем:

$$\pi_{m+1}(x) = p_m(x) + \frac{p''_m(x)}{2}\sigma^2 + \tau\sigma^2 R_1(x) + R(x), \tag{5.6}$$

где

$$R_1(x) = \int\limits_{|t|>\tau} q(t)\,dt\int\limits_0^t p'''_m(x-\xi)\,\xi d\xi. \tag{5.7}$$

Положим: $R(x) = R_2(x) + R_3(x)$, где

$$R_2(x) = \int\limits_{\tau<|t|\leqslant 4T_0} q(t)\,dt\int\limits_0^t p'''_m(x-\xi)\,\xi d\xi, \tag{5.8}$$

$$R_3(x) = \int\limits_{|t|>4T_0} q(t)\,dt\int\limits_0^t p'''_m(x-\xi)\,\xi d\xi, \tag{5.9}$$

T_0 — число введенное в п. 2. Применяя (4.6), найдем:

$$R_2(x) = B\int\limits_{\tau<|t|<4T_0} t^2 q(t)\,dt\cdot p_m(x)\exp\left(C_6 T_0\rho(x)\right). \tag{5.10}$$

Очевидно,

$$R_2(x) = B\sigma^2 p_m(x)\exp\left(C_6 T_0\rho(x)\right).$$

Если же условие Линдеберга выполнено индивидуально, т. е. имеет место (3.3) (где нужно взять $m+1$ вместо n, $j=m+1$ и учесть, что $B_m \sim B_{m+1}$), то:

$$R_2(x) = B\zeta_1\sigma^2 p_m(x)\exp\left(C_6 T_0\rho(x)\right). \tag{5.11}$$

Иначе

$$R_2(x) = B\mu\sigma^2\cdot p_m(x)\cdot\exp\left(C_6 T_0\rho(x)\right), \tag{5.12}$$

где $\mu = \zeta_1$, если (3.3) выполняется, и $\mu = 1$, если оно не выполняется.

Теперь рассмотрим поведение $R_3(x)$. Припомним, что X_{m+1} получилось из урезанной величины X'_{m+1} (с учетом переобозначения). Если $F(u) = \mathbf{P}(X'_{m+1} < u)$, то

$$Q(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi b''_{m+1}}\delta_0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(z-u)^2}{2\delta_0^2 b''_{m+1}}\right]dF(u),$$ откуда при $|z|>4T_0\sqrt{B_m}$

имеем: $Q(z)=\frac{B}{b''_{m+1}}\exp\left[-\frac{z^2}{4\delta_0^2 b''_{m1}}\right]=\frac{B}{b_m}\exp\left[-\frac{z^2}{5b_m}\right]$, и

$$q(t)=\sqrt{B_m}\,Q(t\sqrt{B_m})=\frac{B}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{t^2}{10\sigma^2}\right] \tag{5.13}$$

при $|t|>4T_0$. Отсюда, используя (4.6),

$$R_3(x)=B\int_{|t|>4T_0}|t|\,q(t)\int_0^t|p''_m(x-\xi)|\,d\xi=$$

$$=Bp_m(x)\exp\left[-\frac{T_0^2}{30\sigma^2}\right]\int_{|t|>4T}\exp\left[-\frac{t^2}{20\sigma^2}+C_7(t)\rho(x)\right]dt=$$

$$=Bp_m(x)\exp\left(-\frac{T_0^2}{30\sigma^2}\right)(p_m(x))^{-\Delta}=B(p_m(x))^{1-\Delta}\exp\left[-\frac{T_0^2}{30\sigma^2}\right], \tag{5.14}$$

где Δ — сколь угодно мало при m, а стало быть B_m и $\frac{1}{\sigma^2}$ достаточно больших.

6. Обращаясь к подсчету $-H\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right)$ по формуле (4.3), запишем: $\ln\pi_{m+1}(x)=\ln p_m(x)+\ln\frac{\pi_{m+1}(x)}{p_m(x)}$. Для дальнейшего разложения $\ln\frac{\pi_{m+1}(x)}{p_m(x)}$ в ряд, как видно из формулы (5.6), нужно, чтобы величины (см. (5.3); (5.12); (5.14) и (4.5)):

$$\sigma^2\cdot\frac{1}{2}\frac{p''_m(x)}{p_m(x)}=\sigma^2B\cdot(\rho(x))^2;\quad \tau\sigma^2\frac{R_1(x)}{p_m(x)}=B\tau\sigma^2\exp(C_5\rho(x));$$

$$\frac{R_2(x)}{p_m(x)}=B\mu\sigma^2\exp(C_6T_0\rho(x));\quad \frac{R_3(x)}{p_m(x)}=B\exp\left(-\frac{T_0^2}{30\sigma^2}\right)(p_m(x))^{-\Delta}$$

были в сумме меньше 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество точек x, где каждая из них меньше 0,01, а $\mathfrak{B}$ — дополнительное множество. В силу определения $\rho(x)$ очевидно, что при $x\in\mathfrak{B}$ будем иметь, например:

$$p_m(x)=B\sigma^{1000}. \tag{6.1}$$

Отсюда: при сколь угодно малом фиксированном α

$$\int_{\mathfrak{B}}\pi_{m+1}(x)\ln\pi_{m+1}(x)\,dx=B\int_{\mathfrak{B}}(\pi_{m+1}(x))^{1-\alpha}\,dx=$$

$$=B(p_m(x))^{0,01}\int_{\mathfrak{B}}(p_m(x))^{(1-\Delta)(1-\alpha)-0,01}\,dx=B(p_m(x))^{0,01}=B\sigma^{10} \tag{6.2}$$

в силу леммы 4 (4.10) и (6.1).

На множестве $\mathfrak{A}$ можем разложить $\ln\frac{\pi_{m+1}(x)}{p_m(x)}$ в ряд; получим:

$$\ln\pi_{m+1}(x)=\ln p_m(x)+\frac{p_m''(x)}{p_m(x)}\frac{\sigma^2}{2}+B\sigma^4\left(\frac{p_m''(x)}{p_m(x)}\right)^2+B\tau\sigma^2\cdot$$

$$\cdot\exp(C_5\rho(x))+B\mu\sigma^2\exp(C_6T_0\rho(x))+B\sigma^{1000}(p_m(x))^{-\Delta}.$$

Далее, из (5.6):

$$\pi_{m+1}(x) = p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2}\sigma^2 + p_m(x)\cdot B\tau\sigma^2 \exp\left(C_5\rho(x)\right) +$$

$$+ B\mu\sigma^2 \exp\left(C_6 T_\theta \rho(x)\right) + B\sigma^{1000}\left(p_m(x)\right)^{-\Delta}. \qquad (6.3)$$

Пользуясь леммами 3 (4.5) и 4 (4.10), находим отсюда:

$$\int_{\mathfrak{A}} \pi_{m+1}(x)\ln\pi_{m+1}(x)\,dx = \int_{\mathfrak{A}} \left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2}\sigma^2\right)\left(\ln p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)}\frac{\sigma^2}{2}\right)dx +$$

$$+ B(\tau+\mu)\sigma^2. \qquad (6.4)$$

Как и в доказательстве (6.2), находим:

$$\int_{\mathfrak{B}} \left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2}\sigma^2\right)\left(\ln p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)}\frac{\sigma^2}{2}\right)dx = B\sigma^{100}. \qquad (6.5)$$

Объединяя это с (6.4), приходим к основной формуле:

$$-H\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2}\sigma^2\right)\left(\ln p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)}\frac{\sigma^2}{2}\right)dx + B(\tau+\mu)\sigma^2. \qquad (6.6)$$

В ней возможны дальнейшие упрощения: при раскрытии скобок член, содержащий σ^4, как очевидно на основании предыдущего, будет иметь вид $B\tau\sigma^2$. Далее, $\int_{-\infty}^{\infty} p_m'' dx = 0$, ибо, очевидно, $p_m'(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Таким образом, имеем:

$$-H\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = -H\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p_m''(x)\ln p_m(x)\,dx + B(\tau+\mu)\sigma^2. \qquad (6.7)$$

Далее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m'' \ln p_m dx = p_m' \ln p_m \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p_m'}{p_m}\right)^2 p_m dx. \qquad (6.8)$$

В силу абсолютной сходимости интегралов в правой и левой частях (6.8), должны иметь, очевидно, $p_m'(x)\ln p_m(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, так что первый член в (6.8) исчезает. Далее:

$$\frac{1}{2}\ln \mathbf{D}\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) - \frac{1}{2}\ln \mathbf{D}\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2} + B\sigma^4. \qquad (6.9)$$

Внося полученные результаты в (6.7), найдем:

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = F_m\frac{\sigma^2}{2} + B(\tau+\mu)\sigma^2, \qquad (6.10)$$

где

$$F_m = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p_m'}{p_m}\right)^2 p_m dx - 1 \qquad (6.11)$$

то же, что и в (3.6).

7. Докажем, что $F_m \geqslant 0$. В силу абсолютной сходимости интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp'_m(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_m(x)\,dx$, интегрируя по частям, заключаем, что: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp'_m(x)\,dx = -1$. Отсюда, по неравенству Коши—Буняковского:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_m(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx > 1.$$

Так как первый интеграл равен 1, то это и дает неотрицательность F_m.

Лемма 5. *Пусть* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\eta = \eta(\varepsilon) \to 0$ *вместе с* ε, *такое, что при* $F_m < \varepsilon$

$$\sup_x |p_m(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $f_1(x) = x\sqrt{p_m(x)}$; $f_2(x) = \frac{p'_m(x)}{p_m(x)}\sqrt{p_m(x)}$;

$$a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_1(x))^2\,dx = 1, \quad c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_2(x))^2\,dx; \quad b = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\,dx.$$

Пусть ξ — вспомогательная переменная. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi f_1(x) + f_2(x))^2\,dx = (\xi + b)^2 + F_m. \tag{7.1}$$

Далее, $-b = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp'_m(x)\,dx = 1$. Полагая $\xi = -b = 1$, найдем из (7.1):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) + f_2(x))^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x + \frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx = F_m < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Учитывая свойства $p_m(x)$ и то, что $|p'_m(x)| < C_\delta$, отсюда без труда выводим лемму 5.

8. Формула (6.10) поясняет теоретико-информационный смысл условий Линдеберга; $\mu = \xi_1$, если «индивидуальное условие Линдеберга» (3.3) выполняется, и $\mu = 1$, если оно не выполняется. В силу (3.3) и (3.4) можем сделать важное замечание: если рассмотрим при $j \leqslant n$ такие j, для которых (3.3) не выполняется при данных τ, ζ_1, то сумма их дисперсий относительно мала в соответствии с (3.4). Рассматривая B_n, $B_{n'} \sim 2B_n$, $B_{n''} \sim 2B_{n'}$, ... при $n > M_0$ и выбрасывая между 1 и n, между n и n', между n' и n'' ... такие j, для которых (3.3) не выполняется, и выбрасывая соответствующие X_j из сумм S_n, $S_{n'} - S_n$, $S_{n''} - S_{n'}$ и т. д., получим новую сумму; после нормирования ее соответствующее распределение будет отличаться от прежнего не более, чем на малое число $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$. Ввиду этого, можем считать, что с самого начала все X_j удовлетворяют (3.3), и что в (6.10) можно положить $\mu = \zeta_1$. Полагая в (6.10) $B(\tau + \zeta_1) = \eta_0$, видим, что $I(S_{m+1}) - I(S_m) = F_m \frac{\sigma^4}{2} + \theta\eta_0\sigma^4$ ($|\theta| \leqslant 1$) при всех $m > M_0$. Отсюда замечаем, что либо $I(S_{mn}) - I(S_m) > 0$, либо энтропия возрастает, либо $F_m < 2\eta_0$. В последнем

случае, согласно лемме 5, $p_m(x)$ близко к $g(x)$, и, как легко видеть, $I(S_m)$ близко к $G = \ln \sqrt{2\pi e}$, где $G = I(N_m)$ — энтропия соответствующей нормальной суммы. Далее, видно, что:

$$|\Gamma - G| < \eta_1(\eta_0); \quad \Gamma = \sup_{m > M_0} I(S_m) \tag{8.1}$$

(в дальнейшем $\eta_i(\eta_0) \to 0$ вместе с η_0)*.

Пусть теперь $m > M_0$ выбрано так, что

$$0 \leqslant \Gamma - I(S_m) < \eta_2(\eta_0), \tag{8.2}$$

где $\eta_2(\eta_0)$ — заданное малое число, и $\eta_2(\eta_0) > \eta_0$.

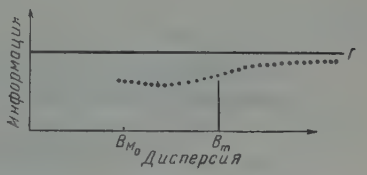

Рис. 1

На основании сказанного выше видим, что при $n > m$, либо $I(S_n)$ возрастает, так что $0 \leqslant \Gamma - I(S_n) < \eta_2$, либо $F_n \leqslant 2\eta_0$, так что в силу (8.1) $0 \leqslant \Gamma - I(S_n) < \eta_3(\eta_0)$. Итак, всегда $0 < \Gamma - I(S_n) < \eta_4(\eta_0)$; считаем $\eta_4 > \eta_0$. В силу (6.10) (где $\mu = \zeta_1$), заключаем, что если m_1 и m_2 таковы, что $\sum_{n=m_1}^{m_2} \sigma_{n+1}^2 \geqslant \sqrt{\eta_4}$, то хотя бы одно из F_n при $m_1 \leqslant n \leqslant m_2$ будет меньше $C_7\sqrt{\eta_4}$, и $p_n(x)$ будут близкой к $g(x)$. Отсюда непосредственно следует, что все $p_n(x)$ будут близки к $g(x)$; точность такого приближения будет в конце концов определяться числом η_0. Это и завершает доказательство.

Заметим, что возможен и другой вариант доказательства, основанный на изучении $I(S_{m+1}, S_m)$ — количества информации суммы о предыдущей сумме. Доказательство можно, по-видимому, распространить на многомерный случай и на некоторые виды нормированных пространств, а также на случай ненормальной сходимости.

Поступила в редакцию
25. 12. 58.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Shannon, W. Weaver, The mathematical theory of communication, Ill. Univ. Press, 1949.

AN INFORMATION THEORETIC PROOF OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM ON LINDEBERG CONDITIONS

Yu. V. LINNIK (*LENINGRAD*)

(*Summary*)

The proof is based on the „information functional" $-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x)\, dx + \frac{1}{2} \ln \mathbf{D}(x)\right)$, $p(x)$ being the density of random variable X. Some new dependencies between the Shannon and Fisher information quantities are established and an information theoretic interpretation of the Lindeberg conditions is given.

* Как указал автору И. В. Романовский, одно элементарное неравенство теории выпуклых функций показывает, что всегда $G \geqslant \Gamma$. Нестрогий вывод сходного факта имеется у Шеннона ([1], гл. III, п. 19).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1959

ON BIVARIATE STATIONARY PROCESSES AND THE FACTORIZATION OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS

*By P. MASANI and N. WIENER**

1. Introduction. Rosanov [8, Thm. 11] has shown that a q-variate weakly stationary stochastic process (S. P.) is regular, if and only if its spectral distribution $\mathbf{F}$ is absolutely continuous and $\mathbf{F}' = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}^*$, where $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{L}_2^{0+} \cdot \mathbf{L}_2^{0+}$ is defined as the class of $q \times q$ matrix-valued function on the circle $C = [|z| = 1]$ whose entries are in L_2, and whose n-th Fourier coefficient vanishes for $n < 0$. Our terminology and notation differ from Rosanov's cf. Sec. 5). In Sec. 2 we shall therefore re-derive his result from our previous work [10, Part I].

Rosanov's theorem reduces the study of the spectral criteria for regularity of stationary processes to that of the factorization of matrix-valued functions. In [10, Part I, 7.13] we have shown that such factorization is possible when $\log \det \mathbf{F}' \in L_1$. Indeed, under some further assumptions we have given an algorithm for the explicit determination of the optimal factor $\mathbf{\Psi}$, [10, Par II, Secs. 6,8], [4]. The condition $\log \det \mathbf{F}' \in L_1$ corresponds to the case in which the process has full rank. As Rosanov has shown and as is implicit in our previous work, $\det \mathbf{F}' = 0$ a. e. for a regular process of degenerate rank. We are thus confronted with the following matrix-function-theoretic problem.

1.1. Factorization Problem. *Given a $q \times q$ non-negative hermitian matrix-valued function $\mathbf{F}'$ in the class $\mathbf{L}_1$ on the circle** $C = [|z| = 1]$ such that $\det \mathbf{F}' = 0$ a. e., to find the conditions under which $\mathbf{F}' = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}^*$, where $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{L}_2^{0+}$.*

In this paper we shall solve this problem for $q = 2$. We shall show (Thm. 4.1) that the necessary and sufficient condition for the factorizability of such a function $\mathbf{F}' = [F'_{ij}]$ is that for $i = 1$ or 2, $\log F'_{ii} \in L_1$, and for $j \neq i$, F'_{ji}/F'_{ii} be the quotient of the radial limits of two functions in a Hardy class H_δ on the disk $[|z| < 1]$, $0 < \delta \leqslant \infty$. We are thus led to the study of quotients of such holomorphic functions (Sec. 3), which are generalizations of the *beschränktartige functions* of R. Nevanlinna [6] for which $\delta = \infty$. Our proof rests on a factorization lemma for such functions

* Sincere thanks are due from Masani to Harvard University and the Massachusetts Institute of Technology for visiting appointments during 1957 — 58, which made this collaboration possible.

** i. e. with entries in the class L_1 on C.

(3.10). Indeed as will appear from the sequel and will be shown elsewhere [5], there is a far reaching connection between the theory of such functions and the prediction theory of bivariate stationary processes. Using our condition for factorizability we arrive at an explicit spectral criterion for the regularity of such processes (Thm. 4.2).

For $q > 2$, Problem 1.1 presents difficulties and is still open.

2. Regularity and factorizability. We shall adhere to the terminology and notation used by us in [10, Part I], prefixing all references to this paper by I.

Let $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ be a q-variate, weakly stationary S. P. with shift operator U. Here each $\mathbf{f}_n = (f_n^i)_{i=1}^q \in \mathscr{H}^q$, where $\mathscr{H}^q$ is the Cartesian product of a complex Hilbert space $\mathscr{H}$ and U is a unitary operator on $\mathscr{H}$ such that $\mathbf{f}_n^i = U^n \mathbf{f}_0^i$ for $1 \leqslant i \leqslant q$. It follows that the Gram matrix

$$(\mathbf{f}_m, \mathbf{f}_n) = [(f_m^i, f_n^j)] = \Gamma_{m-n}$$

depends only on $m - n$. $(\Gamma_n)_{-\infty}^{\infty}$ is called the *covariance sequence* of the process. Let

$$M_n^i = \mathfrak{S}(f_k^i)_{k=-\infty}^n \mathbf{f}, \quad \mathbf{M}_n = \mathfrak{S}(\mathbf{f}_k)_{k=-\infty}^n, \quad 1 \leqslant i \leqslant q, \quad -\infty < n \leqslant \infty.$$

The first is the (closed) subspace of $\mathscr{H}$ spanned by the elements f_k^i for $k \leqslant n$; the second is the corresponding subspace of $\mathscr{H}^q$, defined similarly except that linear combinations are taken with $q \times q$ matrix coefficients and the closure with respect to the induced topology in $\mathscr{H}^q$, cf. I,5.6. The *orthogonal projection* $(\varphi \mid \mathbf{M}_n)$ of a vector $\varphi = (\varphi^i)_{i=1}^q \in \mathscr{H}^q$ on the subspace $\mathbf{M}_n$ is defined as the vector whose i-th component is the projection $\left(\varphi^i \mid \text{clos.} \sum_{i=1}^{q} M_n^i\right)$, cf. I,5.8 (b), 5.9. Let $\mathbf{M}_{-\infty} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}_n$.

We call the S. P. *non-deterministic* if $\mathbf{M}_n \neq \mathbf{M}_{n+1}$, and *regular* if $(\mathbf{f}_0 \mid \mathbf{M}_{-n}) \to 0$ as $n \to \infty$. In the non-deterministic case

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{f}_n - (\mathbf{f}_n \mid \mathbf{M}_{n-1}) \neq 0.$$

Also $(\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) = \delta_{mn}\mathbf{G}$, where $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_0)$. We call $\mathbf{G}$ the *innovation matrix* of the S. P., and following Zasuhin define the *rank* ρ of the latter to be the rank of $\mathbf{G}$. Obviously $1 \leqslant \rho \leqslant q$ for a non-deterministic process; otherwise $\rho = 0$. For ready reference we shall state here the following known results, I, 6.13, 7.7:

2.1. Lemma. *Each of the following conditions is equivalent to the regularity of the S. P.* $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$:

(a) $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ *is a one-sided moving average, i. e.*

$$\mathbf{f}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \varphi_{n-k}, \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}\mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \neq 0; \tag{1}$$

(b) $\mathbf{M}_{-\infty} = \{0\}$.

2.2. **Lemma.** *The moving average process* 2.1 (1) *has an absolutely continuous spectral distribution* $\mathbf{F}$ *such that*

$$\mathbf{F}' = \Psi\Psi^* \text{ a. e., where } \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \sqrt{\mathbf{K}} e^{ki\theta} \in \mathbf{L}_2^{0+},$$

the sign $\sqrt{\ }$ *denoting the non-negative hermitian square root.*

We are now ready to prove Rosanov's Theorem. 11, [8];

2.3. **Theorem.** *A. q-ple S. P.* $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ *is regular, if and only if its spectral distribution* $\mathbf{F}$ *is absolutely continuous, and* $\mathbf{F}' = \Psi\Psi^*$ *a. e., where* $\Psi \in \mathbf{L}_2^{0+}$, *and no row of* Ψ *vanishes a. e.*

Proof. From 2.1 and 2.2 it follows at once that if $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ is regular, then $\mathbf{F}$ is absolutely continuous and $\mathbf{F}' = \Psi\Psi^*$ a. e., where $\Psi \in \mathbf{L}_2^{0+}$. Also no row of Ψ can vanish a. e. For, the vanishing of the i^{th} row would entail that $F_{ii,} = 0 = F_{ii}$, which would mean that our S. P. has less than q (non-zero) components.

To prove the converse, suppose that $\mathbf{F}$ is absolutely continuous and

$$\mathbf{F}' = \Psi\Psi^* \text{ a. e., where } \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k e^{ki\theta} \in \mathbf{L}_2^{0+}. \tag{1}$$

In (1) the same i^{th} row of all $\mathbf{B}_k$ cannot be zero, since this would mean that the f^{th} row of Ψ is zero. Now take any orthonormal S. P. $(\varphi_n)_{-\infty}^{\infty}$, i. e. one such that $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}\mathbf{I}$, and define

$$\tilde{\mathbf{f}}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k \varphi_{n-k}.$$

Then $(\tilde{\mathbf{f}}_n)_{-\infty}^{\infty}$ is a q-ple weakly stationary S. P., which is a one-sided moving average and therefore (by 2.1) regular. Hence by 2.2 (in which we take $\mathbf{K} = \mathbf{I}$) its spectral distribution $\tilde{\mathbf{F}}$ is absolutely continuous and

$$\tilde{\mathbf{F}}' = \tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^*, \text{ where } \tilde{\Psi} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k e^{ki\theta} \in \mathbf{L}_2^{0+}. \tag{2}$$

By (1) and (2) $\tilde{\Psi} = \Psi$ a. e. and therefore $\tilde{\mathbf{F}}' = \mathbf{F}'$ a. e. Since $\tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{F}$ are absolutely continuous, and $\tilde{\mathbf{F}}(1) = 0 = \mathbf{F}(1)$ we have $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$.

Thus $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$, $(\tilde{\mathbf{f}}_n)_{-\infty}^{\infty}$ have the same spectral distribution and therefore the same covariance sequence. If with an obvious notation we let

$$(\mathbf{f}_0 \mid \mathbf{M}_{-n}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \mathbf{A}_k^N \mathbf{f}_{-k}, \quad (\tilde{\mathbf{f}}_0 \mid \tilde{\mathbf{M}}_{-n}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \tilde{\mathbf{A}}_k^N \tilde{\mathbf{f}}_{-k},$$

we may take $\mathbf{A}_k^N = \tilde{\mathbf{A}}_k^N$, of e. g. [10, Part II, Sec. 2].

Therefore

$$|(\mathbf{f}_0 \mid \mathbf{M}_{-n})| = |(\tilde{\mathbf{f}}_0 \mid \tilde{\mathbf{M}}_{-n})|,$$

whence the regularity of $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ follows from that of $(\tilde{\mathbf{f}}_n)_{-\infty}^{\infty}$ (Q. E. D.)

2.4. Corollary. *If* $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ *is regular and has rank* $\rho < q$, *then* $\det \mathbf{F}' = 0$ *a. e.*

Proof. Let the regular S. P. $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ be given by 2.1 (1), say. Then by 2.2 $\det \mathbf{F}' = |\det \mathbf{\Psi}|^2$. Now $\det \mathbf{\Psi}$ is the radial limit a. e. of a function in the Hardy class $H_{2/q}$ on the disk $D_+ = [|z| < 1]$. Hence by I, 2.6 $\log|\det \mathbf{\Psi}| \in L_1$ or $\det \mathbf{\Psi} = 0$ a. e. By I, 7.10 the first alternative would imply that $\rho = q$. Hence $\det \mathbf{\Psi} = 0$ a. e. and so $\det \mathbf{F}' = 0$ a. e. (Q. E. D.)

3. Boundary values of functions in the Nevanlinna class. We shall now discuss the radial limits of quotients of complex valued functions f_1, f_2, which are in the Hardy class H_δ on the disk $D_+ = [|z| < 1]$, cf. I, 2.1. Such limits will be encountered in our solution of Problem 1.1 for the case $q = 2$ in Sec. 4. In the sequel it will be understood that C is the circle $[|z| = 1]$ and that $0 < \delta \leqslant \infty$.

3.1. Definition. (a) We shall say that a function f is in the *Nevanlinna class* N_δ on D_+, if and only if there exist functions f_1, $f_2 \in H_\delta$ on D_+ such that $f_2 \not\equiv 0$, and for all $z \in D_+$ for which $f_2(z) \neq 0$, we have $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$.

(b) A function f will be said to be in the class L_δ^{0+} or Q_δ^{0+} on C, if and only if f is the radial limit a. e. of a function in the class H_δ or N_δ on D_+, respectively.

The following lemma is a simple consequence of well-known properties of Hardy-class functions, cf. e. g. I, 2.6.

3.2. Triviality. (a) $L_\delta^{0+} \subseteq L_\delta$; for $1 \leqslant \delta \leqslant \infty$, L_δ^{0+} is the class of all functions in L_δ on C whose n-th Fourier coefficients vanish for $n < 0$.

(b) $f \in Q_\delta^{0+}$ on C, if and only if there exist functions f_1, $f_2 \in L_\delta^{0+}$ on C such that $f_2 \not\equiv 0$ a. e., and for all $\zeta \in C$ for which $f_2(\zeta) \neq 0$, we have $f(\zeta) = f_1(\zeta)/f_2(\zeta)$.

(c) If $f \in L_\delta^{0+}$ or Q_δ^{0+}, then $\log|f| \in L_1$ or $f = 0$ a. e.

(d) $f \in L_\delta^{0+}$, $g \in L_{\delta'}^{0+}$ implies that $f \cdot g \in L_\varepsilon^{0+}$, where $1/\varepsilon = 1/\delta + 1/\delta'$; analogous results hold with H_δ, N_δ, Q_δ^{0+} replacing L_δ^{0+}.

Let $\varphi \geqslant 0$ on C, $\varphi \in L_\delta$, $\log \varphi \in L_1$, and define g_+ by

$$g_+(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varphi(e^{i\theta}) \{P(z, e^{i\theta}) + iQ(z, e^{i\theta})\}\, d\theta, \quad z \in D_+, \tag{3.3}$$

where P is the Poisson kernal and Q the conjugate kernal. Then as is well-known (cf. e. g. the arguments used in proving I, 2.8), $g_+ \in H_\delta$ on D_+, and if g is its radial limit, then $|g| = \varphi$ a. e. on C. Thus $\log|g| \in L_1$, and (3.3) yields

$$g_+(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(e^{i\theta})| \{P(z, e^{i\theta}) + iQ(z, e^{i\theta})\}\, d\theta, \quad z \in D_+. \tag{3.4}$$

3.5. Definition. (a) We shall say that a function g_+ in H_δ on D_+ is *optimal* *, if and only if the relation (3.4) holds be ween g_+ and its radial limit g. (b) Likewise, we shall call a function $g \in L_\delta^{0+}$ *optimal*, if and only

* Beurling [1] calls such functions *outer function*.

if the relation (3.4) holds between g and its holomorphic extension g_+ on D_+.

Obviously if g_+ is an optimal function in H_δ, then

$$g_+(0) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| \, d\theta > 0. \tag{3.6}$$

$$|g_+(z)| = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| \cdot P(z, e^{i\theta}) \, d\theta > 0, \; z \in D_+. \tag{3.7}$$

On the other hand we know, cf. I, 2.6 (c), that for an arbitrary function f_+ in H_δ with radial limit f,

$$|f_+(z)| \leqslant \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \, P(z, e^{i\theta}) \, d\theta, \; z \in D_+. \tag{3.7'}$$

Hence our choice of the term *optimal* to describe the functions governed by (3.4).

3.8. **Lemma** (Uniqueness). *If f, g are optimal functions in L_δ^{0+} on C and $|f| = |g|$ a. e., then $f = g$ a. e.*

Proof. This is just a restatement of the uniqueness theorem I, 2.9. For letting f_+, g_+ be the extensions of f, g to D_+ and $\varphi = |f| = |g|$ a. e. on C, we have by 3.1 (b), 3.5 (*b*) and 3.6

$$f_+ \in H_\delta \text{ on } D_+, \; |f(re^{i\theta})| \to \varphi(e^{i\theta}) \text{ a. e., as } r \to 1 - 0,$$

$$f_+(0) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varphi(e^{i\theta}) \, d\theta,$$

and the same statement for g_+. Hence by I, 2.9 f_+^* on D_+, and therefore $f = g$ a. e. on $C = g_+$.

3.9. **Lemma.** *Every (non-zero) function f in L_δ^{0+} on C, $0 < \delta \leqslant \infty$ admits the unique factorization $f = g\,\psi$, where $g \in L_\delta^{0+}$ is optimal, $\psi \in L_\infty^{0+}$ and $|\psi| = 1$ a. e. on C.*

Proof. Since $f \neq 0$, it follows by 3.2 (c) that $\log |f| \in L_1$. Define g_+ by (3.3) taking $\varphi = |f|$. Then $g_+ \in H_\delta$ and if g is its radial limit, we have

$$|g| = |f| \text{ a. e. on } C. \tag{1}$$

Hence g satisfies (3.4) i. e. is optimal, and so by (3.7) g_+ has no zerose on D_+. Letting f_+ be the holomorphic extension of f to D_+, it follows that

$$f_+(z) = g_+(z)\,\psi_+(z), \tag{2}$$

where $\psi_+ = f_+/g_+$ is holomorphic on D_+. By (1), (3.7), (3.7') we see that $|f_+(z)| \leqslant |g_+(z)|$ on D_+ so that $\psi_+ \in H_\infty$. Now define ψ as the radial limit of ψ_+. Then $\psi \in L_\infty^{0+}$ and by (1) $|\psi| = 1$ a. e. The existence of the desired factorization now follows on putting $z = re^{i\theta}$ in (2) and letting $r \to 1 - 0$.

This factorization is unique. For if $f = \tilde{g}\tilde{\psi}$ is another such factorization,

* Beurling [1] calls g, ψ the *outer* and *inner factors* of f.

then since $|\psi| = 1 = |\tilde{\psi}|$ a. e., it follows that $|\tilde{g}| = |f| = |g|$ a. e. Hence by 3.8 $\tilde{g} = g$ and therefore $\tilde{\psi} = \psi$. (Q. E. D.)

3.10. Lemma. *Every function f in Q_δ^{0+} on C, $0 < \delta \leqslant \infty$ such that $|f| = 1$ a. e. is in Q_∞^{0+} and admits a factorization $f = \psi_1\bar{\psi}_2$, where ψ_1, $\psi_2 \in L_\infty^{0+}$ and $|\psi_1| = 1 = |\psi_2|$ a. e.*

Proof. By 3.2 (b) $f = f_1/f_2$ a. e., where f_1, $f_2 \in L_\delta^{0+}$ and $f_2 \neq 0$ a. e. Since $|f| = 1$ a. e., therefore $f_1 \neq 0$ a. e. Let then $f_i = g_i\psi_i$ be the unique factorizations of f_i as in 3.9, $i = 1, 2$. Then since $|\psi_i| = 1$, a. e., it follows that $|g_1| = |f_1| = |f_2| = |g_2|$, a. e. Hence by 3.8 $g_1 = g_2$ a. e. Therefore

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1\psi_1}{g_2\psi_2} = \frac{\psi_1}{\psi_2} = \psi_1\bar{\psi}_2 \quad \text{a. e.}$$

Since ψ_1, $\psi_2 \in L_\infty^{0+}$, this shows of course that $f \in Q_\infty^{0+}$. (Q. E. D.)

The last factorization, unlike that in 3.9 is not unique. It is not disturbed when we multiply both ψ_1, ψ_2 by a function $\psi \in L_\infty^{0+}$ such that $|\psi| = 1$ a. e. Supplementary conditions required to secure uniqueness will be given in [5].

4. Factorizability. We are now ready to prove the following theorem, in the stochastic applications of which the function $\mathbf{F}$ is to be interpreted as the derivative of the spectral distribution.

4.1. Factorization Theorem. *Let $\mathbf{F} = [f_{ij}]$ be a 2×2 (non-zero) non-negative, hermitian matrix-valued function which is in $\mathbf{L}_1$ on the circle C and such that $\det \mathbf{F} = 0$ a. e. Then*

(A) $$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* \text{ a. e., where } \mathbf{\Phi} \in \mathbf{L}_2^{0+}$$

if and only if

(B) *for $i = 1$ or, 2 $\log f_{ii} \in L_1$; and for $j \neq i$ $f_{ji}/f_{ii} \in Q_\delta^{0+}$, $0 < \delta \leqslant \infty$.*

Proof. Let (A) hold, and let $\mathbf{\Phi} = [\varphi_{ij}]$. Then

$$f_{11} = |\varphi_{11}|^2 + |\varphi_{12}|^2 \quad \text{a. e.} \tag{1}$$

$$f_{22} = |\varphi_{21}|^2 + |\varphi_{22}|^2 \quad \text{a. e.} \tag{2}$$

$$f_{21} = \varphi_{21}\bar{\varphi}_{11} + \varphi_{22}\bar{\varphi}_{12} = \bar{f}_{12} \quad \text{a. e.} \tag{3}$$

$$\varphi_{12}\varphi_{21} = \varphi_{11}\varphi_{22} \quad \text{a. e.} \tag{4}$$

By (1) and (2),

$$\left.\begin{aligned} \log f_{11} &\geqslant 2\log|\varphi_{11}|,\ 2\log|\varphi_{12}|, \\ \log f_{21} &\geqslant 2\log|\varphi_{21}|,\ 2\log|\varphi_{22}|. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

We now break up the discussion into that of three cases.

Case 1. Suppose that $\log|\varphi_{11}| \in L_1$. Then by (5) $\log f_{11} \in L_1$. Thus φ_{11}, $f_{11} > 0$ a. e. Hence by (3), (4), (1).

$$\frac{f_{21}}{f_{11}} = \frac{1}{f_{11}}\left(\varphi_{21}\bar{\varphi}_{11} + \frac{\varphi_{12}\varphi_{21}}{\varphi_{11}}\bar{\varphi}_{12}\right) = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}} \quad \text{a. e.}$$

Since φ_{21}, $\varphi_{11} \in L_2^{0+}$, we have $f_{21}/f_{11} \in Q_2^{0+}$. Thus (B) holds with $i = 1$ and $\delta = 2$.

Case 2. Let $\log|\varphi_{22}| \in L_1$. Then as before we can show that $\log f_{22} \in L_1$ and $f_{12}/f_{22} = \varphi_{12}/\varphi_{22} \in Q_2^{0+}$, so that (B) holds with $i = 2$ and $\delta = 2$.

Case 3. Suppose that $\log|\varphi_{ii}| \notin L_1$ for $i = 1, 2$. Then since $\varphi_{ii} \in L_2^{0+}$, it follows (cf. 3.2 (c)) that $\varphi_{ii} = 0$, a. e., $i = 1,2$. Hence by (3) $f_{21} = 0 = \bar{f}_{12}$ a. e., and by (4)

$$\varphi_{12}\varphi_{21} = 0 \quad \text{a. e.}$$

Since φ_{12}, $\varphi_{21} \in L_2^{0+}$, the last relation gives the following alternatives:

$$\text{(i)} \quad \varphi_{12} = \varphi_{21} = 0. \quad \text{a. e.}$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi_{12} = 0 \quad \text{a. e.,} \quad \log|\varphi_{21}| \in L_1$$

$$\text{(iii)} \quad \log|\varphi_{12}| \in L_1, \quad \varphi_{21} = 0. \quad \text{a. e.}$$

The first is untenable, since it entails that $\Phi = \mathbf{O}$ a. e. If (ii), then by (5) $\log f_{22} \in L_1$, and $f_{12}/f_{22} = 0 \in Q_2^{0+}$. If (iii), then similarly $\log f_{11} \in L_1$ and $f_{21}/f_{11} = 0 \in Q_2^{0+}$.

We have thus derived (B) in all cases.

Next let (B) hold, and suppose for definiteness that $i = 1$, so that

$$\log f_{11} \in L_1, \text{ and } f_{21}/f_{11} \in Q_\delta^{0+}, \quad 0 < \delta \leqslant \infty. \tag{6}$$

Then, cf. I, 2.9,

$$f_{11} = |\varphi_1|^2, \text{ where } \varphi_1 \in L_2^{0+}. \tag{7}$$

We again have to consider two cases:

Case 1. Suppose that $f_{22} = 0$ a. e. Then $\mathbf{F}$ being non-negative hermitian, we have $f_{12} = f_{21} = 0$ a. e. Hence

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in L_2^{0+}$$

Thus (A).

Case 2. Suppose that $f_{22} > 0$ on a set A of positive measure. Since by (6) $f_{11} > 0$ a. e. it follows that

$$|f_{21}|^2 = f_{11}f_{22} > 0 \text{ a. e. on } A. \tag{8}$$

Thus the function f_{21}/f_{11} in Q_δ^{0+} is non-zero; hence by 3.2 (c) $\log|f_{21}/f_{11}| \in L_1$. But by (8)

$$\log f_{22} = \log|f_{21}/f_{11}|^2 + \log f_{11}.$$

Hence $\log f_{22} \in L_1$. Therefore, in analogy with (7)

$$f_{22} = |\varphi_2|^2, \quad \varphi_2 \in L_2^{0+}. \tag{7'}$$

By (7) and (7') we can write

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\psi} \\ \psi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

where

$$\psi = \frac{f_{21}}{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{f_{21}}{f_{11}} \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Now since $f_{21}/f_{11} \in Q_\delta^{0+}$ and $\varphi_1/\varphi_2 \in Q_2^{0+}$, it follows by 3.2 (d) that $\psi \in Q_\varepsilon^{0+}$ where $\varepsilon = 2\delta/(2+\delta)$. Also from (8), (7), (7'), $|\psi| = 1$ a. e. Hence by 3.10 we have the factorization

$$\psi = \bar{\psi}_1 \psi_2 \text{ a. e., where } \psi_i \in L_\infty^{0+}, \ |\psi_i| = 1 \text{ a. e., } i = 1, 2.$$

Thus

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{\psi} \\ \psi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a. e. and therefore by (9) $\mathbf{F} = \Phi\Phi^*$, where

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1\psi_1 & 0 \\ \varphi_2\psi_2 & 0 \end{bmatrix} \in L_2^{0+}.$$

Thus (A). (Q. E. D.)

Combining the last theorem with our first, 2.3, and with our earlier result I,7.12, and noting that in 2.3 no row of ψ can vanish, we may conclude as follows.

4.2 Theorem. *The bivariate process* $(\mathbf{f}_n)_{-\infty}^{\infty}$ *is regular, if and only if it has an absolutely continuous spectral distribution* $\mathbf{F} = [F_{ij}]$ *such that either*

(i) $\log \det \mathbf{F}' \in L_1$.

or

(ii) $\det \mathbf{F}' = 0$ *a. e.; for* $i = 1$ or 2, $\log F_{ii}' \in L_1$; *and for* $j \neq i$,

$$0 \not\equiv F_{ji}'/F_{ii}' \in Q_\nu^{0+} 0 < \delta \leqslant \infty.$$

In case (i) *the S. P. has rank* 2, *and in case* (ii) *rank* 1.*

5. On the definitions of a q-variate process. We shall now discuss the relationship of the definition of a q-variate weakly stationary S. P., given in Sec. 2, which is due to Zasuhin [11], with that employed by Rosanov in [8].

Zasuhin's definition is a direct generalization of Kolmogorov's [3]: a q-variate, discrete parameter, weakly stationary S. P. is a *stationary sequence in* $\mathcal{H}^q$, $\mathcal{H}$ being a Hilbert space, and stationarity being defined by the Gram-matricial relation $(\mathbf{f}_{m+k}, \mathbf{f}_{n+k}) = (\mathbf{f}_m, \mathbf{f}_n)$. In application $\mathcal{H}$ will consist of course of L_2-random functions over a probability space. Thus the earlier definitions of

* We can easily show that in case (ii) $\log F_{ii}' \in L_1$ for $i = 1, 2$.

Khinchine, Cramer and Wiener are subsumed. Gram matrices enter naturally into the theory, since in applications the components of the q-variate process are *stationarily cross-correlated*. For this reason orthogonality has to be defined in terms of such matrices rather than by inner products, and linear combinations have to be taken with matrix rather than complex coefficients. This procedure has been adopted by Doob [2, Ch. 12, Sec. 7] by us in [10], cf. especially Part I, Secs. 5, 6 and by Rosenblatt [9]. With it have been proved all the results announced by Zasuhin, and many more.

According to Rosanov's definition, however, a q-variate, discrete parameter, weakly stationary S. P. is a pair $(\mathcal{A}, (\mathbf{x}_n)_{-\infty}^{\infty})$ where $\mathcal{A}$ is a q-dimensional unitary space, and the $\mathbf{x}_n$ are isometric mappings on $\mathcal{A}$ into a Hilbert space $\mathcal{H}$, such that the inner product $(\mathbf{x}_{n+k}(\mathbf{a}), \mathbf{x}_n(\mathbf{a}'))$, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{A}$ is independent of n. This definition is shown to be equivalent to Zasuhin's. But its adoption gives the impression that the difficulties of the subject are algebraic, and that the remedy lies in a coordinate-free formulation of the theory. Actually, in all stochastic work the given family of random functions does have a privileged status; and it is not clear what is to be gained from a formulation which obliterates this fact. Indeed, all that Rosanov's mappings seem to accomplish is to replace the matrix notation by the more cumbersome language of quadratic forms or functionals.

The work done so far has shown that the subject is confronted with analytical problems concerning matrix-valued functions akin to those encountered elsewhere, e. g. by Potapov [7]. In the Zasuhin presentation the results of the q-variate theory retain the simple form they have when $q = 1$; only the symbols have to be interpreted as matrices or vectors. This is a great advantage from the operational, heuristic and esthetic standpoints. We therefore see no good reasons for departing from Zasuhin's formulation, as far as q-variate, discrete parameter processes are concerned. But we admit the possibility that Rosanov's definition may prove useful in the abstract generalizations of the subject.

The Institute of Science,
Bombey (India)
Massachusetts Institute Technology,
Cambridge, Mass. (U. S. A.)

Поступила в редакцию
9.1.59

REFERENCES

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Mathematica, 81 (1949), 239—255.
[2] J. L. Doob. Stochastic Processes, New York, 1953.
[3] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, вып. 6 (1941), 1—40.
[4] P. Masani, Sur la prévision linéaire d'un processus vectoriel densité spectrale non bornée, C. R. Acad. Sci. Paris, 246, (1958), 2337—2339.
[5] P. Masani, The generating function of a bivariate stationary process (to appear).
[6] R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen (Zweite Auflage), Berlin, 1953.
[7] В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Моск. Матем. Общ., 4 (1955), 125—236.

[8] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, УМН, **XXIII**, № 12, (1957), 989—992.

[9] M. Rosenblatt. The multidimensional prediction problem, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **43** (1957), 989—992.

[10] N. Wiener and P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes, Part I, Acta Math., **98** (1957), 111—150; Part II, Acta Math., **99** (1958), 93—137.

[11] В. Засухин, К теории многомерных стационарных случайных процессов, ДАН СССР, **33** (1941), 435.

О ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ И РАЗЛОЖЕНИИ МАТРИЧНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

П. МАЗАНИ (ИНДИЯ) и Н. ВИНЕР (США)

(*Резюме*)

Из теоремы Розанова 11 [8] следует, что спектральный критерий регулярности q-мерного слабо стационарного процесса относится к разложению $q \times q$ неотрицательной эрмитовой матричной функции $F' \in L_1$ на окружности $[\,|z| = 1]$ в произведение $\Psi\Psi^*$, где Ψ имеет односторонний ряд Фурье. В [10] (часть I) мы показали, что такое разложение возможно при условии $\lg \det F' \in L_1$.

В настоящей работе задача решается для вырожденного случая, т. е. когда $\det F' = 0$, но только для $q = 2$. Мы показываем, что $F' = [F'_{ij}]$ разложима тогда и только тогда, когда $\lg F'_{ii} \in L_1$ $(i = 1,2)$, и F'_{ji}/F'_{ii} $(i \neq j)$ есть частное радиального предела двух функций в классе Харди H_δ на круге $[\,|z| < 1]$, $0 < \delta < \infty$. Так как терминология и обозначения Розанова отличаются от наших, его теорема была выведена заново.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1959

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $\mathfrak{A}u + V \cdot u = 0$

Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

Введение. В настоящей заметке используются терминология и обозначения, введенные в монографии [1]. Пусть $X = (X_t, \tau, M_t, P_x, \theta_t)$ — строго марковский случайный процесс с непрерывными траекториями в области D метрического пространства (E, ρ). Обозначим $\mathfrak{A}$ расширенный инфинитезимальный оператор процесса X в смысле Дынкина. (Напомним, что $u \in D_{\mathfrak{A}}$, если существует $\lim\limits_{d(U)\to 0} \dfrac{\mathbf{M}_x u(X\tau_U) - u(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U} = \mathfrak{A}u(x)$, причем u и $\mathfrak{A}_u$ непрерывны. Здесь τ_U — время выхода из окрестности U точки x, а $d(U)$ — диаметр этой окрестности.)

Пусть τ — момент обрыва процесса есть момент первого достижения границы Γ области D, а область D такова, что $\mathbf{M}_x \tau \leqslant c < \infty$ для всех $x \in D$ и множество $D \cup \Gamma$ компактно. Предположим далее, что граница Γ регулярна для процесса X в том смысле, что соотношение

$$\mathbf{P}_x\{X_\tau \in U_{x_0}\} \to 1 \text{ при } x \to x_0 \tag{1}$$

выполняется для любой окрестности U_{x_0} и для всех $x_0 \in \Gamma$. Пусть $V(x)$ непрерывная * и не отрицательная функция в D. В настоящей заметке изучаются условия существования конечного математического ожидания у случайной величины $\zeta = \exp\left\{\int\limits_0^\tau V(X_t)\, dt\right\}$.

Величина $\mathbf{M}_x \zeta$ может не существовать даже в самых регулярных случаях. В [2] показано, что даже для винеровского процесса на отрезке случайная величина e^τ $(V \equiv 1)$ может не иметь математического ожидания, если отрезок достаточно велик.

Дело в том, что в «хороших» случаях $\mathbf{P}_x\{\tau > t\} \sim e^{-ct}$ при $t \to \infty$ для некоторой положительной постоянной c, а потому $\mathbf{M}_x e^\tau = \int e^t d_t \mathbf{P}_x\{\tau < t\} = \infty$ при $c < 1$. Поэтому исследование вопроса об условиях существования $\mathbf{M}_x \zeta$ есть в известном смысле исследование асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}_x\{\tau > t\}$ при $t \to \infty$.

К изучению ζ приводит также рассмотрение следующей случайной схемы.

Пусть $X_t(\omega)$ — траектория уже не одной частицы, а случайного числа ν_t («пакета») однотипных частиц. При этом за время Δt с вероятностью $p_n \cdot V_1(X_t)\Delta t + o(\Delta t)$ каждая из частиц пакета превращается в n частиц и с вероятностью $1 - p_n V_1(X_t)\Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt пакет не претерпевает изменений. (Очевидно $p_n \geqslant 0$ и $p_0 + p_2 +$

* Это условие в дальнейшем будет ослаблено (см. замечание к теореме 3).

$+p_3+\ldots=p_1$). Для этой случайной схемы в настоящей заметке изучается вопрос об условиях конечности математического ожидания числа частиц в пакете к моменту достижения пакетом границы области. В самом деле, ясно, что $\mathbf{M}_x\nu_\tau = k\mathbf{M}_x\exp\{a\int_0^\tau V_1(X_t)\,dt\}$, где k — число частиц в пакете в начальный момент времени, $a=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot p_n - p_1$.

В § 1 и 2 настоящей заметки показано, что необходимым и достаточным условием конечности $\mathbf{M}_x\zeta$ является существование решения уравнения

$$\mathfrak{A}u+V\cdot u=0, \tag{2}$$

непрерывного и положительного в замкнутой области $D\cup\Gamma$. Для частного случая диффузионного процесса на прямой соответствующая теорема имеется без доказательства в работе автора [2].

При том же условии существования положительного решения в § 2 доказано существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения (2). В § 3 даны различные достаточные условия существования положительного решения уравнения (2). В § 4 для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, показано, что существование положительного решения уравнения (2) в непересекающихся областях D_1 и D_2 влечет существование положительного решения в некоторой односвязной области, содержащей D_1 и D_2. Этот результат применяется затем для доказательства устойчивости наибольшего собственного значения эллиптического оператора по отношению к некоторым нелокальным изменениям области.

Для доказательства теоремы 1 мы воспользовались приемом, аналогичным тому, который был применен Е. Б. Дынкиным в [3].

§ 1. Интегральное уравнение для $\mathbf{M}_x\zeta$.

Лемма 1. *Для случайной величины ξ и не зависящей от будущего случайной величины τ таких, что $\mathbf{M}_x\int_0^\tau \theta_t\xi\,dt$ существует, выполняется соотношение:*

$$\mathbf{M}_x\int_0^\tau \theta_t\xi\,dt = \mathbf{M}_x\int_0^\tau \mathbf{M}_{X_t}\xi\,dt.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$H(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t>0,\\ 0 & \text{при } t\leqslant 0.\end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathbf{M}_x[H(\tau-t)\cdot\theta_t\xi\,|\,M_t]=H(\tau-t)\cdot\mathbf{M}_x[\theta_t\xi\,|\,M_t], \tag{3}$$

так как $\{\tau-t<0\}\in M_t$.

Пользуясь теоремой Фубини и (3), получим:

$$\mathbf{M}_x\int_0^\tau \theta_t\xi\,dt=\mathbf{M}_x\int_0^\infty H(\tau-t)\,\theta_t\xi\,dt=\int_0^\infty \mathbf{M}_x H(\tau-t)\,\theta_t\xi\,dt=$$

$$=\int_0^\infty \mathbf{M}_x[\mathbf{M}_x H(\tau-t)\,\theta_t\xi\,|\,M_t]\,dt=\int_0^\infty \mathbf{M}_x H(\tau-t)\,\mathbf{M}_x[\theta_t\xi\,|\,M_t]\,dt=\mathbf{M}_x\int_0^\tau \mathbf{M}_{X_t}\xi\,dt.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если функция* $u(x) = \mathbf{M}_x\zeta$ *конечна для всех* $x \in D$, *то она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$u(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\, u(X_t)\, dt + 1. \tag{4}$$

Если к тому же процесс X *является сильно феллеровским, то* $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* (2) *граничным условиям*

$$u|_\Gamma = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Дифференцированием по t легко доказать тождество: $\exp\left\{\int_t^\tau V(X_s)\, ds\right\} = \int_t^\tau V(X_s)\cdot\exp\left\{\int_s^\tau V(X_u)\, du\right\} ds + 1$. Отсюда $\mathbf{M}_x\exp\left\{\int_0^\tau V(X_s)\, ds\right\} = \mathbf{M}_x\int_0^\tau V(X_s)\exp\left\{\int_s^\tau V(X_u)\, du\right\} ds + 1$. Применив теперь к правой части последнего равенства лемму 1, мы получим первое утверждение теоремы. Пусть теперь процесс является сильно феллеровским*. Тогда (см. [4]) правая, а значит и левая часть (4) есть непрерывная функция от x.

Из регулярности границы и (4) следует, что $u(x) \to 1$ при $x \to x_0 \in \Gamma$. Проверим теперь, что $u(x) \in D_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}u = -Vu$. В самом деле,

$$\mathfrak{A}u(x) = \lim_{d(U)\to 0} \frac{\mathbf{M}_x u(X_{\tau_U}) - u(x)}{\mathbf{M}_x\tau_U} =$$

$$= \lim_{d(U)\to 0} \frac{\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{X_{\tau_U}} \int_0^\tau V(X_t)\cdot u(X_t)\, dt - \mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\, u(X_t)\, dt}{\mathbf{M}_x\tau_U} =$$

$$= -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\mathbf{M}_x \int_0^{\tau_U} V(X_t)\, u(X_t)\, dt}{\mathbf{M}_x\tau_U} = -V(x)\cdot u(x)$$

в силу непрерывности функции $V(X)\cdot u(x)$.

Доказанная теорема позволяет сформулировать следующее необходимое условие конечности $\mathbf{M}_x\zeta$ для сильно феллеровских процессов.

Если $\mathbf{M}_x\zeta$ *существует, то уравнение* (2) *в области* D *имеет положительное и непрерывное в* $D \cup \Gamma$ *решение.*

Замечание. Пусть процесс X сильно феллеровский, $\psi(s)$ — непрерывная функция на Γ, а функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\cdot u(X_t)\, dt + \mathbf{M}_x\psi(X_\tau). \tag{4'}$$

* Примечание при корректуре. Как стало известно автору, работа [4] появится в печати позднее настоящей статьи. Изложим поэтому то определение сильно феллеровских процессов, которое используется в настоящей работе. Сильно феллеровским мы называем процесс, переходная функция которого обладает свойствами: 1) $\int_D P(x, t, dy) f(y)$ есть непрерывная по x функция для любой измеримой $f(x)$, 2) $P(x, t, V_\varepsilon(x)) \to 0$ равномерно по x при $t \to 0$ ($V_\varepsilon(x)$ дополнение к ε-окрестности точки x).

Тогда, применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получим, что $u\in D_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}u+Vu=0$ и $u(x)\to\psi(s)$ при $x\to s$. Однако ни существование, ни единственность решения уравнения (4′) не очевидны. Более того, легко привести примеры, когда решение уравнения (4′) не существует.

§ 2. Достаточное условие конечности $M_x\zeta$

Предположим теперь, что процесс сильно феллеровский и уравнение (2) имеет решение $\varphi(x)$, непрерывное и положительное в замкнутой области $D\cup\Gamma$. Мы будем говорить в этом случае, что уравнение (2) разрешимо в области D. Обозначим

$$\lim_{d(U)\to 0}\frac{M_x\varphi(X_{\tau_U})[z(X_{\tau_U})-z(x)]}{M_x\tau_U}=\mathfrak{B}z(x).$$

Если этот предел существует для всех $x\in D$ и если z и $\mathfrak{B}z$ непрерывны, то положим $z\in D_{\mathfrak{B}}$.

Лемма 2. *$D_{\mathfrak{B}}$ состоит из функций вида $\frac{u(x)}{\varphi(x)}$, где $u(x)\in D_{\mathfrak{A}}$. При этом* $\mathfrak{B}\left(\frac{u}{\varphi}\right)=\mathfrak{A}u+Vu$.

Доказательство. Обозначим $\frac{u}{\varphi}=w$ и пусть $u(x)\in D_{\mathfrak{A}}$. Тогда

$$\mathfrak{A}u(x)=\lim_{d(U)\to 0}\frac{M_xu(X_{\tau_U})-u(x)}{M_x\tau_U}=$$

$$=\lim_{d(U)\to 0}\frac{[M_xw(X_{\tau_U})\varphi(X_{\tau_U})-w(x)\,M_x\varphi(X_{\tau_U})]+[w(x)M_x\varphi(X_{\tau_U})-w(x)\varphi(x)]}{M_x\tau_U}=$$

$$=w(x)\mathfrak{A}\varphi(x)+\lim_{d(U)\to 0}\frac{M_x\varphi(X_{\tau_U})[w(X_{\tau_U})-w(x)]}{M_x\tau_U}=w(x)\mathfrak{A}\varphi(x)+\mathfrak{B}w(x).$$

Из тех же выкладок следует, что $u(x)\in D_{\mathfrak{A}}$, если $w(x)\in D_{\mathfrak{B}}$. Далее имеем: $\mathfrak{B}w=\mathfrak{A}u-w\mathfrak{A}\varphi-wV\varphi+w\cdot V\cdot\varphi=\mathfrak{A}u+V\cdot u-w(\mathfrak{A}\varphi+V\varphi)=\mathfrak{A}u+V\cdot u$.

Лемма доказана.

Замечание. Из определения оператора $\mathfrak{B}$ видно, что он обладает следующим свойством, которым обладает и оператор $\mathfrak{A}$. Если функция w достигает максимального значения в точке $x_0\in D$, то $\mathfrak{B}w(x_0)\leqslant 0$.

Можно показать, пользуясь теоремой Хилла—Иосида (см. [5]), что оператор $B\in\mathfrak{B}$, область определения которого состоит из функций $w\in D_{\mathfrak{B}}$, таких, что $w|_\Gamma=0$, является инфинитезимальным оператором некоторого марковского процесса в области D с исчезновением на Γ.

Теорема 2. *Решение первой краевой задачи для уравнения* (2) *единственно, если уравнение* (2) *разрешимо в области D.*

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2) и $u|_\Gamma=0$. Положим $w=\frac{u}{\varphi}$. На основании леммы 2 имеем: $\mathfrak{B}w=0$. Введем вспомогательную функцию $g=c_2+\frac{M_x\tau-c_1}{\varphi(x)}$. При этом постоянные c_1 и c_2 выберем так, чтобы

неравенства $\mathbf{M}_x\tau - c_1 < 0$ и $g(x) > 0$ выполнялись при всех $x \in D$. На основании леммы 2 имеем:

$$\mathfrak{B}g = \mathfrak{A}\mathbf{M}_x\tau + V(\mathbf{M}_x\tau - c_2) = -1 + V(\mathbf{M}_x\tau - c_2) < 0$$

при всех $x \in D$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ функция $\mathfrak{B}(w + \varepsilon g) = \varepsilon\mathfrak{B}g < 0$. Следовательно функция $w + \varepsilon g$ достигает минимального значения на Γ. Отсюда $w + \varepsilon g > 0$ в D и, так как ε произвольно, $w \geqslant 0$. Так как такое же неравенство можно получить и для функции $-w$, то $w = \dfrac{u}{\varphi} \equiv 0$, а значит и $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\varphi(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau \varphi(X_t)\, V(X_t)\, dt + \mathbf{M}_x \varphi(X_\tau). \tag{6}$$

В самом деле, из замечания к теореме 1 следует, что функция, стоящая в правой части (6), удовлетворяет уравнению (2) и граничному условию. В силу доказанной единственности она совпадает с $\varphi(x)$.

Теорема 3. *Если уравнение (2) разрешимо в области D, то $\mathbf{M}_x\zeta$ конечно.*

Доказательство. Будем решать уравнение (4) методом последовательных приближений, положив $u_0(x) = 1$. Применяя лемму 1, получим

$$u_n(x) = 1 + \mathbf{M}_x \int_0^\mu V(X_t)\, dt + \mathbf{M}_x \frac{\left[\int_0^\tau V(X_t)\, dt\right]^2}{2!} + \ldots + \mathbf{M}_x \frac{\left[\int_0^\tau V(X_t)\, dt\right]^n}{n!}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Далее, не нарушая общности, можно считать, что $\varphi(x)|_\Gamma \geqslant 1$. (Этого можно добиться, домножив $\varphi(x)$ на постоянный множитель.) Отсюда, используя (6), получим $\varphi(x) \geqslant 1 = u_0(x)$ всюду в $D \cup \Gamma$. Используя соотношение (6) еще n раз, получим:

$$u_n(x) < \varphi(x) \text{ в } D. \tag{7}$$

Переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}_x \frac{\left[\int_0^\tau V(X_t)\, dt\right]^n}{n!} \leqslant \varphi(x).$$

Из последнего соотношения легко получить, что $\mathbf{M}_x\zeta$ конечно.

Замечание. Обозначим τ_G^D — время, проведенное в множестве G до достижения границы множества D. Пусть функция $V(x)$ разрывна на множестве $D_0 \subset D$ таком, что выполняется условие: для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такая окрестность G множества D_0, что $\mathbf{P}_x\{\tau_G^D > \varepsilon\} < \delta$ для всех $x \in D$.

Тогда легко проверить с помощью предельного перехода, что случайная величина $\int_0^\tau V(X_t)\, dt$ измерима и функция $\mathbf{M}_x\zeta$ удовлетворяет уравнению (4)

при всех $x\in D$. Уравнение же (2) выполняется лишь в точках непрерывности функции $V(x)$. Все доказанные результаты в этом случае сохранятся, если понимать решение уравнения (2) в следующем обобщенном смысле.

Определение. Будем говорить, что функция $u(x)$, принимающая на Г значения $\psi(s)$, удовлетворяет уравнению (2) с разрывной $V(x)$, если уравнение (2) удовлетворяется во всех точках непрерывности $V(x)$, а в точках разрыва $V(x)$ выполняется соотношение (4′).

Теорема 4. *Если уравнение* (2) *разрешимо в области* D, *то решение уравнения* (4) (*а, значит, и первой краевой задачи для уравнения* (2)) *существует.*

Доказательство. Обозначим $N=\max\limits_{x\in\Gamma}|\psi(x)|$. Положим $u_0(x)=0$ и пусть $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots$ — функции, полученные из рекуррентного соотношения

$$u_n(x)=\mathbf{M}_x\int_0^\tau V(X_t)\,u_{n-1}(X_t)\,dt+\mathbf{M}_x\psi(X_\tau). \tag{8}$$

Очевидно $|u_1(x)|<N$. Используя лемму 1, легко получить:

$$|u_n(x)-u_{n-1}(x)|<N\cdot\mathbf{M}_x\frac{\left[\int\limits_0^\tau V(X_t)\,dt\right]^{n-1}}{(n-1)!},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Так как в правой части неравенства стоят члены сходящегося ряда (это следует из теоремы 3), то существует $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=u(x)$. Переходя теперь в (8) к пределу при $n\to\infty$, получим, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (4′).

§ 3. Некоторые достаточные условия разрешимости

Лемма 3. *Для того чтобы уравнение* (2) *было разрешимо в области* D, *достаточно, чтобы неравенство* *

$$\mathbf{M}_x\int_0^\tau V(X_t)\,dt<1 \tag{9}$$

выполнялось для всех $x\in D$.

* Следующий пример показывает, что единица в правой части неравенства (9) не может быть, вообще говоря, заменена большей постоянной.

Рассмотрим винеровский процесс на отрезке $[-a,+a]$ и пусть

$$V(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|\geqslant\dfrac{1}{2n},\\ q\cdot n & \text{при } |x|\leqslant\dfrac{1}{2n}\end{cases}$$

(q — некоторое положительное число). Несложный расчет показывает, что для $V(x)$ такого вида при замене единицы на $r>1$ в правой части (9) всегда найдутся такие q и n, что $\mathbf{M}_x\zeta=\infty$, а $\mathbf{M}_x\int\limits_0^\tau V(X_t)\,dt<r$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,dt \leqslant q$ для некоторого $q < 1$. Используя теперь лемму 1, получим:

$$\mathbf{M}_x \frac{\left[\int_0^\tau V(X_t)\,dt\right]^2}{2!} = \mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,[\mathbf{M}_{x_t} \int_0^\tau V(X_s)\,ds]\,dt \leqslant q\mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,dt \leqslant q^2.$$

Аналогично и при любом n

$$\mathbf{M}_x \frac{\left[\int_0^\tau V(X_t)\,dt\right]^n}{n!} \leqslant q^n. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}_x \left[\int_0^\tau V(X_t)\,dt\right]^n}{n!} \leqslant \frac{1}{1-q}$ и $\mathbf{M}_x\zeta$ существует. Применяя теперь теорему 1, мы получим утверждение леммы.

Следствие. *Уравнение* (2) *разрешимо в области* D, *если диаметр области* D *достаточно мал.*

В самом деле, $\mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,dt \leqslant \sup_{x \in D} V(x) \cdot \mathbf{M}_x\tau$, а величина $\mathbf{M}_x\tau$ может быть сделана сколь угодно малой за счет сужения диаметра области D.

Лемма 4. *Если* $\mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,dt \leqslant q < 1$ *для всех* $x \in D$, *то для любого измеримого множества* $\Gamma_1 \leqslant \Gamma$ *выполняется соотношение*

$$\int_{\{X_\tau \in \Gamma_1\}} \exp\left\{\int_0^{\tau(\omega)} V(X_t(\omega))\,dt\right\} \mathbf{P}_x(d\omega) \leqslant \mathbf{P}_x\{X_t \in \Gamma_1\} + \mathbf{M}_x \int_0^\tau V(X_t)\,dt \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Доказательство этой леммы мы опускаем, так как оно аналогично доказательству леммы 3.

Пусть теперь область D с регулярной границей Γ поверхностью $\widetilde{\Gamma}$ разбита на 2 области D_1 и D_2 с регулярными границами Γ_1 и Γ_2 (При этом $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.)

Предположим, что уравнение (2) разрешимо в областях D_1 и D_2 и положим

$$M = \max_{\substack{x \in D_l \\ l=1,2}} \left\{ \mathbf{M}_x \exp\left[\int_0^{\tau_{D_l}} V(X_t)\,dt\right]\right\}.$$

Пусть $U \subset D$ — любая область с регулярной границей такая, что $U \cup \Gamma_U \supset \widetilde{\Gamma}$.

Обозначим

$$\max_{x\in\widetilde{\Gamma}} \mathbf{P}_x\{X_{\tau_U}\in\Gamma_U\cap D\}=\varepsilon_U;\quad \max_{x\in U}\mathbf{M}_x\int\limits_0^{\tau_U} V(X_t)\,dt=q_U.$$

Теорема 5. *Если в D существует область U такая, что*

$$\varepsilon_U+\frac{q_U}{1-q_U}<\frac{1}{M}, \tag{11}$$

то уравнение (2) *разрешимо в области D.*

Доказательство. Для любого множества $\Delta\subset D$ и $\gamma<\Gamma_\Delta$ положим

$$\int\limits_{\{X_{\tau_\Delta}\in\Gamma\}}\exp\left\{\int\limits_0^{\tau_\Delta(\omega)} V(X_t(\omega))\,dt\right\}\mathbf{P}_x(d\omega)=\mathbf{M}_\Delta(x,\gamma).$$

Будем говорить, что непрерывная в D функция $x(t)$, определенная при $0\leqslant t\leqslant T$, содержит ровно n циклов, если существуют

$$\min_{\{x(t)\in D\cap\Gamma_U\}} t=t_1;\quad \min_{\{t>t_1;\ x(t)\in\widetilde{\Gamma}\}} t=t_2;\quad \min_{\{t>t_2;\ x(t)\in\Gamma_U\}} t=t_3;\ldots;\quad \min_{\{t>t_{2n-1};\ x(t)\in\widetilde{\Gamma}\}} t_{2n},$$

причем $x(t)\notin\Gamma_U$ при $t_{2n}<t\leqslant T$.

Обозначим A_n множество функций, содержащих ровно n циклов. Используя теперь строгую марковость процесса X, получим, положив для определенности $x\in U$:

$$\mathbf{M}_x\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\{X_t(\omega)\in A_n\}}\exp\left\{\int\limits_0^{\tau} V(X_t(\omega))\,dt\right\}\mathbf{P}_x(d\omega)=$$

$$=M_U(x,\Gamma\cap\Gamma_U)+\sum_{i_1=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_U\cap D_{i_1}} M_U(x,dz_1)\,M_{D_{i_1}}(z_1,\Gamma_{i_1}\setminus\widetilde{\Gamma})+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_U\cap D_{i_1}} M_U(x,dz_1)\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} M_{D_{i_1}}(z_1,dx_1)\cdot M_U(x_1,\Gamma\cap\Gamma_U)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_U\cap D_{i_1}} M_U(x,dz_1)\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} M_{D_{i_1}}(z_1,dx_1)\times$$

$$\times\sum_{i_2=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_U\cap D_{i_2}} M_U(x_1,dz_2)\,M_{D_{i_2}}(z_2,\Gamma_{i_2}\setminus\widetilde{\Gamma})+\ldots \tag{12}$$

Применим теперь лемму 4 к области U и граничному множеству $\Gamma_U\cap D$. Тогда получим

$$M_U(x,\Gamma_U\cap D)\leqslant\varepsilon_U+\frac{q_U}{1-q_U}. \tag{13}$$

Используя (12) и (13), получим:

$$\mathbf{M}_x\zeta \leqslant q_U + M\cdot\left(\varepsilon_U + \frac{q_U}{1-q_U}\right) + q_U M\left(\varepsilon_U + \frac{q_U}{1-q_U}\right) +$$

$$+\left[M\left(\varepsilon_U + \frac{q_U}{1-q_U}\right)\right]^2 + q_U\left[M\left(\varepsilon_U + \frac{q_U}{1-q_U}\right)\right]^2 + \ldots =$$

$$= q_U + (1+q_U)\sum_{n=1}^{\infty}\left[M\left(\varepsilon_U + \frac{q_U}{1-q_U}\right)\right]^n.$$

Ряд сходится в силу (11).

§ 4. Процессы, описываемые дифференциальными уравнениями

Пусть процесс X задан в области G эвклидова пространства, а оператор $\mathfrak{A}$ является расширением невырожденного эллиптического дифференциального оператора

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда при некоторых условиях гладкости на коэффициенты оператора L процесс X удовлетворяет всем сделанным выше предположениям, в частности является сильно феллеровским (см. [4]). Используя доказанную единственность решения первой краевой задачи для уравнения (2), а также теоремы существования для дифференциальных уравнений, нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием существования $\mathbf{M}_x\zeta$ в этом случае является существование положительного в замкнутой области решения уравнения

$$Lu + Vu = 0. \tag{2'}$$

Полученные в § 3 достаточные условия разрешимости упрощаются в этом случае. В частности может быть получен следующий аналог теоремы 5.

Теорема 5'. *Пусть $D_1 \subset G$ и $D_2 \subset G$ — две области с регулярными границами, расстояние между которыми положительно и в каждой из которых разрешимо уравнение (2'). Тогда в G существует односвязная область $D \supset D_1 \cup D_2$, в которой уравнение (2') тоже разрешимо.*

Теорему 5' можно применить для доказательства устойчивости наибольшего собственного значения оператора $Lu + Vu$ по отношению к некоторым изменениям области. В самом деле, пусть $\lambda_{\max}^{D_1}$ и $\lambda_{\max}^{D_2}$ — наибольшие собственные значения задач: $Lu + Vu = \lambda u$; $u \in D_1$; $u|_{\Gamma_{D_1}} = 0$ и $Lu + V\cdot u = \lambda u$, $u \in D_2$; $u|_{\Gamma_{D_2}} = 0$ и пусть для определенности $\lambda_{\max}^{D_1} \geqslant \lambda_{\max}^{D_2}$. Тогда ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ в областях D_1 и D_2 уравнение

$$Lu + (V - \lambda_{\max}^{D_1} - \varepsilon)u = 0$$

разрешимо. На основании теоремы 5' найдется односвязная область D_ε такая

что $D_1 \cup D_2 \subset D_\varepsilon \subset G$, в которой это уравнение разрешимо, значит $\lambda_{\max}^{D_\varepsilon} < \lambda_{\max}^{D_1} + \varepsilon$. Ясно также, что $\lambda_{\max}^{D_1} < \lambda_{\max}^{D_\varepsilon}$.

Таким образом нами получена

Теорема 5″. *Пусть* $D_1 \subset G$ *и* $D_2 \subset G$ *— две области с регулярными границами, расстояние между которыми положительно. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует односвязная область* D_ε *такая, что*:

$$1)\ D_1 \cup D_2 \subset D_\varepsilon \subset G.$$

$$2)\ 0 < \lambda_{\max}^{D_\varepsilon} - \max\ \{\lambda_{\max}^{D_1},\ \lambda_{\max}^{D_2}\} < \varepsilon.$$

В заключение автор выражает благодарность Е. Б. Дынкину за ряд ценных советов. В частности, ему принадлежит окончательная редакция леммы 1.

Поступила в редакцию
3. 1. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Основные понятия теории марковских процессов, Физматгиз, 1959г.
[2] Р. З. Хасьминский, ДАН СССР, **104**, 1 (1955), 22—25.
[3] Е. Б. Дынкин, ДАН СССР, **104**, 5 (1955), 691.
[4] И. Д. Гирсанов, Сильно феллеровские процессы (будет опубликована в журнале Теор. вероят. и ее прим.).
[5] Ф. Рисс и Б. Секфальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, Москва, 1954, стр. 432—435.

ON POSITIVE SOLUTIONS OF THE EQUATION $\mathfrak{A}u + Vu = 0$

R. Z. HASMINSKI (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Let X_t be a path of the continuous Markov process in the domain D with boundary Γ in a metric space, τ is the moment of reaching the Γ, $\mathfrak{A}$ is the extended infinitesimal operator of the process and V is a continuous non-negative function at D. The theorem reads as follows.

Let Γ *be regular in sense* (1), X_t *is the strong Feller process; then* $\mathbf{M}_x \exp\left\{\int_0^\tau V(X_t)\,dt\right\} < +\infty$ *if and only if the equation* (2) *has a solution positive and continuous in the* $D \cup \Gamma$.

This theorem is applied for receiving different conditions, which guarantee the existence of the unique solution of the first boundary value problem for (2). Stability of the maximal eigenvalue of the operator $\mathfrak{A}u + Vu$ $(u \mid_\Gamma = 0)$ by some global changes of domain is proved too.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том IV *Выпуск 3*
1959

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ТЕХНИКЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕМИИНВАРИАНТОВ

В. П. ЛЕОНОВ и А. Н. ШИРЯЕВ

Техника вычисления старших моментов и семиинвариантов при изучении нелинейных преобразований случайных процессов довольно сложна (см., наприм., [1], [2]). В [3] содержится интересное замечание о том, что в некоторых случаях после определения зависимости моментов m_η многочлена $\eta = Q(\xi)$ от семиинвариантов s_ξ процесса $\xi(t)$, семиинварианты процесса $\eta(t)$ находятся простым вычеркиванием лишних членов по определенному правилу. Наша теорема в § 2 показывает, что это замечание сохраняет силу при значительно более общих предположениях.

Настоящая работа выполнена под руководством А. Н. Колмогорова, которому авторы выражают свою благодарность как за постановку задачи, так и за многочисленные ценные указания, полученные в ходе ее решения.

§ 1. Введение

Пусть задан случайный вектор $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$. Рассмотрим его характеристическую функцию

$$\varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathbf{M} e^{i(\alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_k\eta_k)}.$$

Будем предполагать, что $\mathbf{M}\,|\eta_j|^n < \infty$. Тогда существуют смешанные моменты $\mathbf{M}\{\eta_1^{\nu_1} \ldots \eta_k^{\nu_k}\}$ для всех $\nu_1, \ldots, \nu_k$ таких, что $\nu_j \geqslant 0$, $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leqslant n$. Отсюда вытекает, что частные производные

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \ldots + \nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1} \ldots \partial\alpha_k^{\nu_k}} \varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

существуют и непрерывны для $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leqslant n$. Следовательно, функцию $\varphi_\eta(\alpha_1, \ldots \alpha_k$ можно разложить по формуле Тейлора:

$$\varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_k \leqslant n} \frac{i^{\nu_1 + \ldots + \nu_k}}{\nu_1! \ldots \nu_k!} m_\eta^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)} \alpha_1^{\nu_1} \ldots \alpha_k^{\nu_k} + o(|\alpha|^n), \tag{1}$$

где $\sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_k \leqslant n}$ берется по всем целым неотрицательным $\nu_1, \ldots, \nu_k$, сумма которых не превосходит n, $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k|$ и

$$m_\eta^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)} = \mathbf{M}\{\eta_1^{\nu_1} \ldots \eta_n^{\nu_k}\}; \tag{2}$$

— моменты вектора η.

Так как $\varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ непрерывна по $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\varphi_\eta(0, \ldots, 0) = 1$, то существует такая окрестность нуля $|\alpha| < \delta$, в которой $\varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$. В этой окрестности существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1} \ldots \partial\alpha_k^{\nu_k}} \ln \varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

если $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leqslant n$. Следовательно, для $|\alpha| < \delta$ функция $\ln \varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ также может быть разложена по формуле Тейлора:

$$\ln \varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k \leqslant n} \frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1! \ldots \nu_k!} s_\eta^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} \alpha_1^{\nu_1} \ldots \alpha_k^{\nu_k} + o(|\alpha|^n), \tag{3}$$

где

$$s_\eta^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1} \ldots \partial\alpha_k^{\nu_k}} \ln \varphi_\eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\Big|_{|\alpha| = 0}. \tag{4}$$

Величины $s_\eta^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)}$ называют *семиинвариантами* вектора η.

Для сокращения записи обозначим целый неотрицательный вектор * $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ через ν и вектор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ через α. Если $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ — некоторый целый неотрицательный вектор и $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — некоторый действительный вектор, то введем следующие обозначения:

$$\beta^\mu = \beta_1^{\mu_1} \ldots \beta_k^{\mu_k}; \quad \mu! = \mu_1! \ldots \mu_k!; \quad |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_k.$$

Дальше будем обозначать: $m_\eta^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = m_\eta^{(\nu)}$; $s_\eta^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = s_\eta^{(\nu)}$. В частном случае, когда $\nu = \{1, \ldots, 1\}$ моменты $m_\eta^{(\nu)}$ и семиинварианты $s_\eta^{(\nu)}$ будем называть *простыми* и обозначать m_η и s_η соответственно **.

Замечание 1. Для любого μ имеем: $m_\eta^{(\mu)} = m_{\eta'}$ и $s_\eta^{(\mu)} = s_{\eta'}$, где η' — вектор с компонентами η'_{il}; $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant l \leqslant \mu_i$, такими, что с вероятностью единица

$$\eta'_{il} = \eta_i \tag{5}$$

для всех i, l.

Формулы (1) и (3) в новых обозначениях примут вид:

$$\varphi_\eta(\alpha) = \sum_{|\nu| < n} \frac{i^{|\nu|}}{\nu!} m_\eta^{(\nu)} \alpha^\nu + o(|\alpha|^n), \tag{1.a}$$

$$\ln \varphi_\eta(\alpha) = \sum_{|\nu| \leqslant n} \frac{i^{|\nu|}}{\nu!} s_\eta^{(\nu)} \alpha^\nu + o(|\alpha|^n). \tag{3.a}$$

Мы укажем сейчас формулы, связывающие $m_\eta^{(\nu)}$ и $s_\eta^{(\nu)}$, доказательство которых приведено в § 3:

---

* Т. е. вектор с целыми неотрицательными компонентами.

** Если рассматривать η_i как значения случайной функции $\eta(t)$ в точках t_i, то простые семиинварианты совпадают с обобщенными корреляционными функциями, введенными в [1], а простые моменты — с моментными функциями, введенными в [2], с той разницей, что мы предполагаем лишь существование конечного числа моментов.

$$m_\eta^{(\nu)} = \sum_{\lambda^{(1)}+\ldots+\lambda^{(q)}=\nu} \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} s_\eta^{(\lambda^{(p)})}, \tag{I.a}$$

$$s_\eta^{(\nu)} = \sum_{\lambda^{(1)}+\ldots+\lambda^{(q)}=\nu} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} m_\eta^{(\lambda^{(p)})}, \tag{II.a}$$

где $\sum_{\lambda^{(1)}+\ldots+\lambda^{(q)}=\nu}$ означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных векторов $\lambda^{(p)}$, $|\lambda^{(p)}| > 0$, дающих в сумме вектор ν.

Эти формулы можно записать также следующим образом:

$$m_\eta^{(\nu)} = \sum_{\{r_1\lambda^{(1)}+\ldots+r_x\lambda^{(x)}=\nu\}} \frac{1}{r_1! \ldots r_x!} \frac{\nu!}{(\lambda^{(1)}!)^{r_1} \ldots (\lambda^{(x)}!)^{r_x}} \prod_{j=1}^{x} \left[s_\xi^{(\lambda^{(j)})} \right]^{r_j}, \tag{I.b}$$

$$s_\eta^{(\nu)} = \sum_{\{r_1\lambda^{(1)}+\ldots+r_x\lambda^{(x)}=\nu\}} \frac{(-1)^{q-1}(q-1)!}{r_1! \ldots r_x!} \frac{\nu!}{(\lambda^{(1)}!)^{r_1} \ldots (\lambda^{(x)}!)^{r_x}} \prod_{j=1}^{x} \left[m_\xi^{(\lambda^{(j)})} \right]^{r_j}, \tag{II.b}$$

где $\sum'_{\{r_1\lambda^{(1)}+\ldots+r_x\lambda^{(x)}=\nu\}}$ означает суммирование по всем *неупорядоченным* наборам *различных* целых неотрицательных векторов $\lambda^{(j)}$, $|\lambda^{(j)}| > 0$, и по всем упорядоченным наборам целых положительных чисел r_j таким, что $r_1\lambda^{(1)} + \ldots + r_x\lambda^{(x)} = \nu$.

Формулы, дающие связь простых моментов и семиинвариантов, получаются из формул (I.b) и (II.b) как частный случай, но их удобно записать по-другому.

Обозначим I_η множество индексов компонент вектора η. В рассматриваемом случае $I_\eta = \{1, 2, \ldots, k\}$. Если $I \subseteq I_\eta$, то обозначим η_I вектор, состоящий из тех компонент вектора η, индексы которых принадлежат I, а $\chi(I)$ — вектор $\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, у которого $\chi_i = 1$, если $i \in I$ и $\chi_i = 0$, если $i \overline{\in} I$. Так как векторы $\chi(I)$ взаимно-однозначно соответствуют множествам $I \subseteq I_\eta$, то обозначим $m_\eta^{(\chi(I))} = m_{\eta_I}(I)$; $s^{(\chi(I))} = s_{\eta_I}(I)$. Из определений (2) и (4) легко следует, что $m_\eta(I) = m_{\eta_I}$ и $s_\eta(I) = s_{\eta_I}$, т. е. $m_\eta(I)$ ($s_\eta(I)$) является простым моментом (семиинвариантом) подвектора η_I вектора η. *Разбиением* множества I назовем *неупорядоченный* набор непересекающихся непустых множеств I_p такой, что $\bigcup_p I_p = I$. В этих обозначениях имеют место формулы *:

$$m_\eta(I) = \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} \prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p), \tag{I.c}$$

$$s_\eta(I) = \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} (-1)^{q-1}(q-1)! \prod_{p=1}^{q} m_\eta(I_p), \tag{II.c}$$

где $\sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I}$ означает суммирование по всем разбиениям множества I.

* Формула (I.c) является видоизменением формулы (2) приложения II работы [2].

§ 2. Формулировка теоремы

Пусть дан случайный вектор ξ с компонентами ξ_{ij}, индексы которых—пары целых чисел (i, j)—принадлежат множеству $\mathfrak{D}$, определяемому условиями: $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant j \leqslant m_i$. При этом допускается, что по-разному занумерованные случайные величины могут быть равны с вероятностью единица.

Обозначим m_i-мерный вектор $\{\xi_{i1}, \ldots, \xi_{im_i}\}$ через $\xi_{i\cdot}$. В соответствии с этим будем обозначать $\nu_{i\cdot}$ целый неотрицательный вектор $\{\nu_{i1}, \ldots, \nu_{im_i}\}$.

Пусть компоненты η_l k-мерного вектора η выражаются полиномиально через вектор $\xi_{l\cdot}$, т. е.

$$\eta_l = Q_l(\xi_{l\cdot}) = \sum_{\nu_{l1}, \ldots, \nu_{lm_l}} a^{(l)}_{\nu_{l1} \ldots \nu_{lm_l}} \xi_{l1}^{\nu_{l1}} \ldots \xi_{lm_l}^{\nu_{lm_l}} = \sum_{\nu_{l\cdot}} a^{(l)}_{\nu_{l\cdot}} \xi_{l\cdot}^{\nu_{l\cdot}}, \tag{6}$$

где $a^{(l)}_{\nu_{l\cdot}} = a^{(l)}_{\nu_{l1} \ldots \nu_{lm_l}}$ вещественные постоянные, которые могут отличаться от нуля лишь при $0 < |\nu_{l\cdot}| \leqslant N$. Поэтому суммирование $\sum_{\nu_{l\cdot}}$ можно считать распространенным лишь на те $\nu_{l\cdot}$, для которых $0 < |\nu_{l\cdot}| \leqslant N$.

Целью настоящей работы является вычисление семиинвариантов вектора η по известным семиинвариантам вектора ξ. Сначала будет дано правило для вычисления простого семиинварианта s_η. Предварительно выразим простой момент m_η вектора η через моменты вектора ξ в предположении, что $\mathbf{M}\,|\xi_{ij}|^{Nk} < \infty$:

$$m_\eta = \mathbf{M}\{\eta_1 \ldots \eta_k\} = \mathbf{M}\left\{\prod_{i=1}^{k} \sum_{\nu_{i\cdot}} a^{(i)}_{\nu_{i\cdot}} \xi_{i\cdot}^{\nu_{i\cdot}}\right\} = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_k} a^{(1)}_{\nu_{1\cdot}} \ldots a^{(k)}_{\nu_{k\cdot}} \mathbf{M}\{\xi_{1\cdot}^{\nu_{1\cdot}} \ldots \xi_{k\cdot}^{\nu_{k\cdot}}\}.$$

Обозначив $(m_1 + \ldots + m_k)$-мерный целый неотрицательный вектор $\{\nu_{11}, \ldots, \nu_{1m_1}, \ldots, \nu_{k1}, \ldots, \nu_{km_k}\}$ через ν и положив

$$a_\nu = a^{(1)}_{\nu_{1\cdot}} \ldots a^{(k)}_{\nu_{k\cdot}},$$

получим формулу

$$m_\eta = \sum_\nu a_\nu m_\xi^{(\nu)}. \tag{III}$$

Подставив в (III) выражение $m_\xi^{(\nu)}$ через $s_\xi^{(\lambda)}$ по формуле (I.а), получаем связь между m_η и $s_\xi^{(\lambda)}$:

$$m_\eta = \sum_\nu a_\nu \sum_{\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu} \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}. \tag{IV.а}$$

Здесь $\lambda^{(p)}$ обозначает $m_1 + \ldots + m_k$-мерный целый неотрицательный вектор $\{\lambda_{11}^{(p)}, \ldots, \lambda_{1m_1}^{(p)}, \ldots, \lambda_{k1}^{(p)}, \ldots, \lambda_{km_k}^{(p)}\}$.

Прежде чем формулировать правило для вычисления s_η, введем некоторые определения. Составим из пар чисел $(i, j) \in \mathfrak{D}$ следующую таблицу:

$$\begin{array}{l} (1,1)\ (1,2)\ \ldots\ (1,\ m_1) \\ (2,1)\ (2,2)\ \ldots\ (2,\ m_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k,1)\ (k,2)\ \ldots\ (k,\ m_k) \end{array} \tag{A}$$

Назовем разбиение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$ *построчным*, если для каждой строки таблицы (A) имеем: либо все ее элементы попадают в $\mathfrak{D}'$, либо все ее элементы попадают в $\mathfrak{D}''$. Обозначим $C(\lambda^{(p)})$ множество пар (i, j) таких, что $\lambda_{ij}^{(p)} > 0$. Очевидно, что $C(\lambda^{(p)}) \subseteq \mathfrak{D}$ для всех $\lambda^{(p)}$, входящих в формулу (IVa).

Назовем произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ *неразложимым*, если не существует построчного разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$ такого, что для любого p либо $C(\lambda^{(p)}) \subseteq \mathfrak{D}'$, либо $C(\lambda^{(p)}) \subseteq \mathfrak{D}''$.

Замечание 2. Произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ неразложимо тогда и только тогда, когда не существует построчного разбиения $C(\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)}) = C' \cup C''$ такого, что для любого p либо $C(\lambda^{(p)}) \subseteq C'$, либо $C(\lambda^{(p)}) \subseteq C''$.

Теорема *. *Если в правой части формулы* (IV.a) *оставить только те слагаемые у которых произведение* $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ *неразложимо, то получится* s_η, *т. е.*

$$s_\eta = \sum_\nu a_\nu \sum_{\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu}^{*} \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}, \qquad \text{(IV.b)}$$

где $\sum_{\lambda^{(1)} + \ldots + (\lambda)^q = \nu}^{*}$ *означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных векторов* $\lambda^{(p)}$, $|\lambda^{(p)}| > 0$, *дающих в сумме вектор* ν, *для которых произведение* $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ *неразложимо.*

Замечание 3. Формула (IV.b) может быть записана в виде:

$$s_\eta = \sum_\nu a_\nu \sum_{\{r_1\lambda^{(1)} + \ldots + r_x\lambda^{(x)} = \nu\}}^{*} \frac{1}{r_1! \ldots r_x!} \frac{\nu!}{(\lambda^{(1)}!)^{r_1} \ldots (\lambda^{(x)}!)^{r_x}} \prod_{j=1}^{x} \left[s_\xi^{(\lambda^{(j)})} \right]^{r_j}, \qquad \text{(IV.c)}$$

где $\sum_{\{r_1\lambda^{(1)} + \ldots + r_x\lambda^{(x)} = \nu\}}$ берется по всем *неупорядоченным* наборам *различных* векторов $\lambda^{(j)}$, $|\lambda^{(j)}| > 0$ и по всем *упорядоченным* наборам целых положительных чисел r_j таким, что $r_1\lambda^{(1)} + \ldots + r_x\lambda^{(x)} = \nu$ и произведение $\prod_{j=1}^{x} \left[s_\xi^{(\lambda^{(j)})} \right]^{r_j}$ неразложимо.

Сформулированная теорема дает правило вычисления простого семиинварианта s_{η_i}. Но согласно замечанию 1, имеем $s_\eta^{(\mu)} = s_{\eta'}$, где η' определяется равенствами (5), и, следовательно, выражается через ξ следующим образом:

$$\eta'_{il} = Q_i(\xi_{il}),$$

где с вероятностью единица $\xi_{il} = \xi_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant l \leqslant \mu_i$. В том случае, когда $\mathbf{M}\{|\xi_{ij}|^{N|\mu|}\} < \infty$, можно применять сформулированное в теореме правило к вычислению $s_{\eta'}$ и получить таким образом $s_\eta^{(\mu)}$.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

---

*Доказательство приведено в § 3.

1. Пусть $m_l = 1$; $Q_l = Q$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. В этом случае $\eta_l = Q(\xi_l) = \sum_{\nu_l=1}^{N} a_{\nu_l} \xi^{\nu_l}$: от таблицы (A) остается лишь один первый столбец; ν и λ обозначают k-мерные векторы $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ соответственно; произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ неразложимо тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде:

$$\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})} = \Pi' \Pi'' ; \quad \Pi' = \prod_{j=1}^{y} s_\xi^{(\lambda^{(p'_j)})} ; \quad \Pi'' = \prod_{j=1}^{z} s_\xi^{(\lambda^{(p''_j)})} \tag{7}$$

так, чтобы множества $\bigcup_{j=1}^{y} C(\lambda^{(p'_j)})$ и $\bigcup_{j=1}^{z} C(\lambda^{(p''_j)})$ не пересекались. Если ξ_i рассматривать как значения случайной функции $\xi(t)$ в точках t_i, то $s_\xi^{(\lambda)}$ зависит лишь от тех t_i, на которых $\lambda_i > 0$, и условие неразложимости произведения $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ означает, что его нельзя представить в виде (7) так, чтобы Π' и Π'' зависели каждое от своих аргументов t_i. В такой форме для случая $\eta_i = \xi_i^2$ это правило указано без доказательства в [3].

Поясним указанное правило следующим простым примером. Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $M\xi_i = 0$ и $\eta_i = \xi_i^2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Имеем $m_\eta = m_\xi^{(2,2,2)}$. Представляя $m_\xi^{(2,2,2)}$ по формуле (I.b), получаем:

$$\begin{aligned} m_\eta = m_\xi^{(2,2,2)} &= s_\xi^{(2,2,2)} + s_\xi^{(2,0,0)} s_\xi^{(0,2,2)} + s_\xi^{(0,2,0)} s_\xi^{(2,0,2)} + s_\xi^{(0,0,2)} s_\xi^{(2,2,0)} + \underline{4 s_\xi^{(1,1,0)} s_\xi^{(1,1,2)}} + \\ &+ \underline{4 s_\xi^{(1,0,1)} s_\xi^{(1,2,1)}} + \underline{4 s_\xi^{(0,1,1)} s_\xi^{(2,1,1)}} + \underline{4 s_\xi^{(1,1,1)} s_\xi^{(1,1,1)}} + \\ &+ \underline{2 s_\xi^{(0,1,2)} s_\xi^{(2,1,0)}} + \underline{2 s_\xi^{(0,2,1)} s_\xi^{(2,0,1)}} + \underline{2 s_\xi^{(1,0,2)} s_\xi^{(1,2,0)}} + s_\xi^{(0,0,2)} s_\xi^{(0,2,0)} s_\xi^{(2,0,0)} + \\ &+ 2 s_\xi^{(1,1,0)} s_\xi^{(1,1,0)} s_\xi^{(0,0,2)} + 2 s_\xi^{(1,0,1)} s_\xi^{(1,0,1)} s_\xi^{(0,2,0)} + 2 s_\xi^{(0,1,1)} s_\xi^{(0,1,1)} s_\xi^{(2,0,0)} + \\ &+ \underline{8 s_\xi^{(1,1,0)} s_\xi^{(1,0,1)} s_\xi^{(0,1,1)}}. \end{aligned}$$

Здесь подчеркнуты те и только те слагаемые, для которых произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ неразложимо и, следовательно, сумма подчеркнутых слагаемых равна s_η.

2. Пусть $a_\nu \neq 0$ только для $\nu = \chi(\hat{\mathfrak{L}})$, где $\hat{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}$. Легко видеть, однако, что любое преобразование вида (6) может быть представлено в таком виде, так как степень случайной величины всегда можно рассматривать как произведение по-разному занумерованных, но с вероятностью единица равных между собой, случайных величин.

В этом случае формулу (IV.b) удобно записать по-другому. Запишем формулы (III) и (IV.a) следующим образом:

$$m_\eta = \sum_\nu a_\nu m_\xi(C(\nu)),$$

$$m_\eta = \sum_\eta a_\nu \sum_{\bigcup_{p=1}^{\alpha} \mathfrak{D}_p = C(\nu)} s_\xi(\mathfrak{D}_p).$$

Набор непересекающихся множеств $\{\mathfrak{D}_p\}$, $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{D}$ назовем *неразложимым*, если не суще-

ствует построчного разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$ такого, что для любого p либо $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}'$, либо $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}''$.

Замечание 4. Набор $\{\mathfrak{D}_p\}$, $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}$ неразложим тогда и только тогда, когда не существует построчного разбиения $\bigcup_{p=1}^{q} \mathfrak{D}_p = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$ такого, что для любого p либо $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}'$, либо $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}''$.

Если $\hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}$, то назовем разбиение $\hat{\mathfrak{D}} = \bigcup_{p=1}^{q} \mathfrak{D}_p$ *неразложимым*, в том случае, когда набор $\{\mathfrak{D}_p\}$ неразложим. В этих терминах формула (IV.b) запишется так:

$$s_\eta = \sum_\nu a_\nu \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} \mathfrak{D}_p = C(\nu)}{}^{*} \prod_{p=1}^{q} s_\xi(\mathfrak{D}_p), \tag{IV.d}$$

где Σ^* означает суммирование по всем неразложимым разбиениям.

Укажем теперь некоторое свойство набора $\{\mathfrak{D}_p\}$, $\mathfrak{D}_p \subseteq \mathfrak{D}$, эквивалентное его неразложимости. Мы скажем, что множества $\mathfrak{D}_{p_1}$ и $\mathfrak{D}_{p_2}$ *зацепляются*, если существуют $(i_1, j_1) \in \mathfrak{D}_{p_1}$ и $(i_2, j_2) \in \mathfrak{D}_{p_2}$ такие, что $i_1 = i_2$. Будем говорить, что множества $\mathfrak{D}_{p'}$ и $\mathfrak{D}_{p''}$ из набора $\{\mathfrak{D}_p\}$ *сообщаются*, если существует последовательность множеств $\mathfrak{D}_{p_1} = \mathfrak{D}_{p'}$, $\mathfrak{D}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{D}_{p_r} = \mathfrak{D}_{p''}$ из набора $\{\mathfrak{D}_p\}$ такая, что $\mathfrak{D}_{p_j}$ и $\mathfrak{D}_{p_{j+1}}$ зацепляются.

Замечание 5. Набор $\{\mathfrak{D}_p\}$ неразложим тогда и только тогда, когда все его множества сообщаются.

§ 3. Доказательства

А. Доказательство формул связи между моментами и семиинвариантами. Из (3.a) имеем:

$$\varphi_\eta(\alpha) = \exp\left\{ \sum_{1 \leqslant |\lambda| \leqslant n} \frac{i^{|\lambda|}}{\lambda!} s_\eta^{(\lambda)} \alpha^\lambda + o(|\alpha|^n) \right\},$$

откуда, как легко видеть, следует:

$$\varphi_\eta(\alpha) = 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q!} \left(\sum_{1 \leqslant |\lambda| \leqslant n} \frac{i^{|\lambda|}}{\lambda!} s_\eta^{(\lambda)} \alpha^\lambda \right)^q + o(|\alpha|^n). \tag{8}$$

Приравнивая в правых частях (1.a) и (8) коэффициенты при α^λ и учитывая, что $|\lambda^{(1)}| + \ldots + |\lambda^{(q)}| = |\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)}|$, получаем формулу (I.a).

Докажем теперь формулу (I.b). Пусть среди векторов $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(q)}$: r_1 векторов равны $\lambda^{(i_1)}$, $\ldots$, r_x векторов равны $\lambda^{(i_x)}$ ($r_j > 0$; $r_1 + \ldots + r_x = q$), причем все векторы $\lambda^{(i_s)}$ различны. Тогда, как известно из комбинаторики, существует $\frac{q!}{r_1! \ldots r_x!}$ различных наборов векторов, совпадающих с точностью до порядка с набором $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(q)}\}$. Но если наборы $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(q)}\}$ и $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \bar{\lambda}^{(q)}\}$ различаются лишь порядком, то $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})} = \prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\bar{\lambda}^{(q)})}$. Следовательно, отождествляя наборы, совпадающие с точностью до порядка, получаем из (I.a) формулу (I.b). Если $\nu = \chi(I)$ и $\lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu$, то $\lambda^{(p)} = \chi(I_p)$, $I_p \subseteq I$, все $\lambda^{(p)}$ различны, $\lambda^{(p)}! = \nu! = 1$ и каждому неупорядоченному набору $\{\chi(I_1), \ldots, \chi(I_q)\}$ взаимно-однозначно соответствует разбиение $I = \bigcup_{p=1}^{q} I_p$. Следовательно из (.Ib) следует (I.c).

Для доказательства формул (II.a), (II.b) и (II.c) достаточно заметить, что из (I.a) вытекает:

$$\ln \varphi_\eta(\alpha) = \ln\left[1 + \sum_{1 \leqslant |\lambda| \leqslant n} \frac{i^{|\lambda|}}{\lambda!} m_\xi^{(\lambda)} \alpha^\lambda + o(|\alpha|^n)\right],$$

и что при малых x имеет место разложение:

$$\ln(1+x) = \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^{q-1}}{q} x^q + o(x^n).$$

Остальные рассуждения вполне аналогичны предыдущим.

Б. Доказательство теоремы.

Лемма. *Пусть ζ_I — случайный вектор, индексы компонент которого принадлежат некоторому конечному множеству I; пусть $I = I' \cup I''$ — разбиение множества I и векторы $\zeta_{I'}$ и $\zeta_{I''}$ независимы; пусть также $\{\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(q)}\}$ — набор целых неотрицательных векторов такой, что $s_{\zeta_I}^{(\lambda^{(p)})}$ определен для любого $1 \leqslant p \leqslant q$ и существует p_1: $1 \leqslant p_1 \leqslant q$ такое что множества $C(\lambda^{(p_1)}) \cap I'$ и $C(\lambda^{(p_1)}) \cap I''$ оба непусты. Тогда $\prod_{p=1}^{q} s_{\xi_I}^{(\lambda^{(p)})} = 0$.*

Доказательство. Легко показать, что из равенства

$$\ln \varphi_{\zeta_I}(\alpha) = \ln \varphi_{\zeta_{I'}}(\alpha) + \ln \varphi_{\zeta_{I''}}(\alpha)$$

вытекает, что $s_{\zeta_I}^{(\lambda^{(p_1)})} = 0$, откуда и следует утверждение леммы.

Обозначим множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ индексов компонент вектора η через I; множество индексов компонент вектора ξ, как и в § 2, обозначим через $\mathfrak{D}$. Запишем более подробно формулу (I.c):

$$m_\eta = m_\eta(I) = s_\eta(I) + \sum_{q=2}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} \prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p).$$

Подставив в левую часть (IV.a) полученное выражение для m_η, оставим в левой части $s_\eta(I)$, а остальные члены перенесем в правую. Получим:

$$s_\eta(I) = \Sigma^* + \widetilde{\Sigma} + \overline{\Sigma}, \tag{9}$$

где Σ^* обозначает сумму тех слагаемых из правой части (IVa), для которых произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ неразложимо; $\widetilde{\Sigma}$ обозначает сумму остальных слагаемых из правой части (IVa) и

$$\overline{\Sigma} = -\sum_{q=2}^{n} \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} \prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p).$$

Мы покажем, что $\widetilde{\Sigma} + \overline{\Sigma} = 0$, и тем самым теорема будет доказана.

Будем говорить, что произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p)\left(\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}\right)$ разложимо относитель-

но данного разбиения $I = I' \cup I''$ (построчного разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$), если для любого p либо $I_p \subseteq I'$ ($C(\lambda^{(p)}) \subseteq \mathfrak{D}'$), либо $I_p \subseteq I''$ ($C(\lambda^{(p)}) \subseteq \mathfrak{D}''$).

Очевидно, что каждому разбиению $I = I' \cup I''$ взаимно-однозначно соответствует построчное разбиение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$ такое, что элементы, находящиеся в строках с номерами, принадлежащими I', попадают в $\mathfrak{D}'$, а элементы, находящиеся в строках с номерами, принадлежащими I'', попадают в $\mathfrak{D}''$.

Возьмем теперь какое-нибудь разбиение $I = I_1' \cup I_1''$ и соответствующее ему построчное разбиение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1' \cup \mathfrak{D}_1''$. Пусть $\bar{\Sigma}_1$ ($\tilde{\Sigma}_1$) обозначает сумму всех тех слагаемых из $\bar{\Sigma}$ ($\tilde{\Sigma}$), для которых произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p) \left(\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})} \right)$ разложимо относительно разбиения $I = I_1' \cup I_1''$ (построчного разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1' \cup \mathfrak{D}_1''$) и пусть

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Sigma}^{(1)} &= \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_1 \\ \tilde{\Sigma}^{(1)} &= \tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_1 \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

Если $\hat{I} \subseteq I$ и $\hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}$, то через $\mathbf{P}_{\hat{I}}$ ($\mathbf{P}_{\hat{\mathfrak{D}}}$) будем обозначать распределение случайного вектора $\eta_{\hat{I}}$ ($\xi_{\hat{\mathfrak{D}}}$). Покажем, что $\tilde{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_1 = 0$ для любого $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$. Пусть задано произвольное распределение $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$. Тем самым определяются распределения $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$. При этом распределение $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$ определяет распределение $\mathbf{P}_I$, а распределение $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ ($\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$) определяет распределение $\mathbf{P}_{I_1'}$ ($\mathbf{P}_{I_1''}$). Как легко видеть, для любого слагаемого из $\bar{\Sigma}_1$ ($\tilde{\Sigma}_1$) произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p) \left(\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})} \right)$ определяется заданием $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$ и при фиксированных $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$ не зависит от $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$. Следовательно, при фиксированных $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$ сумма $\tilde{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_1$ не зависит от $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$. Согласно (9) и (10) имеем тождество для всех $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$:

$$s_\eta(I) = \Sigma^* + \tilde{\Sigma}^{(1)} + \bar{\Sigma}^{(1)} + \tilde{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_1. \tag{11}$$

Положим теперь в последнем равенстве $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}}^{(1)} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'} \times \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$, что означает независимость векторов $\xi_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\xi_{\mathfrak{D}_1''}$, а также векторов $\eta_{I_1'}$ и $\eta_{I_1''}$. Так как для любого слагаемого из $\Sigma^{(1)}$ ($\Sigma^* + \tilde{\Sigma}^{(1)}$) произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p) \left(\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})} \right)$ не является разложимым относительно разбиения $I = I_1' \cup I_2'$ ($\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1' \cup \mathfrak{D}_1''$), то, в силу леммы, имеем

$$\Sigma^* + \tilde{\Sigma}^{(1)} + \bar{\Sigma}^{(1)} = 0.$$

В то же время из леммы следует, что $s_\eta(I) = 0$, и тогда из (11) получаем:

$$\tilde{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_1 = 0$$

при любых $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$, если $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}}^{(1)} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'} \times \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$.

Но так как при фиксированных $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_1''}$ сумма $\widetilde{\Sigma}_1 + \overline{\Sigma}_1$ не зависит от $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$, то $\widetilde{\Sigma}_1 + \overline{\Sigma}_1 = 0$ для любого $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$, откуда получаем тождество для всех $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$

$$s_\eta(I) = \Sigma^* + \widetilde{\Sigma}^{(1)} + \overline{\Sigma}^{(1)}. \tag{9.a}$$

Пусть теперь $I = I_2' \cup I_2''$ — какое-то другое разбиение и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2' \cup \mathfrak{D}_2''$ — соответствующее ему построчное разбиение; пусть $\overline{\Sigma}_2^{(1)}$ ($\widetilde{\Sigma}_2^{(1)}$) — сумма всех тех слагаемых из $\overline{\Sigma}^{(1)}$ ($\widetilde{\Sigma}^{(1)}$), для которых произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p)$ $\left(\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}\right)$ разложимо относительно разбиения $I = I_2' \cup I_2''$ ($\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2' \cup \mathfrak{D}_2''$) и пусть

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Sigma}^{(2)} &= \overline{\Sigma}^{(1)} - \overline{\Sigma}_2^{(1)} \\ \widetilde{\Sigma}^{(2)} &= \widetilde{\Sigma}^{(1)} - \widetilde{\Sigma}_2^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{10.a}$$

Согласно (9.a) и (10.a) имеем тождество для всех $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$:

$$s_\eta(I) = \Sigma^* + \widetilde{\Sigma}^{(2)} + \overline{\Sigma}^{(2)} + \widetilde{\Sigma}_2^{(1)} + \overline{\Sigma}_2^{(1)}. \tag{11.a}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что при фиксированных $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2''}$ сумма $\widetilde{\Sigma}_2^{(1)} + \overline{\Sigma}_2^{(1)}$ не зависит от $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$ и, положив в (11.a) $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}}^{(2)} = \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2'} \times \mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2''}$, получаем: $\Sigma^* + \widetilde{\Sigma}^{(2)} + \overline{\Sigma}^{(2)} = 0$; $s_\eta(I) = 0$ и, следовательно, $\widetilde{\Sigma}_2^{(1)} + \overline{\Sigma}_2^{(1)} = 0$ при любых $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2'}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}_2''}$, т. е. $\widetilde{\Sigma}_2^{(1)} + \overline{\Sigma}_2^{(1)} = 0$ при любом $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$.

Заметим, что:

1) всех разбиений $I = I' \cup I''$ имеется конечное число;

2) перебирая все разбиения $I = I' \cup I''$, мы переберем все построчные разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$;

3) для каждого слагаемого из $\overline{\Sigma}$ произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\eta(I_p)$ разложимо относительно некоторого разбиения $I = I' \cup I''$, так как $q \geqslant 2$;

4) по определению неразложимого произведения $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$, для каждого слагаемого из $\widetilde{\Sigma}$ произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})}$ разложимо относительно некоторого построчного разбиения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$.

Следовательно, перебирая все возможные разбиения $I = I' \cup I''$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $\widetilde{\Sigma} + \Sigma = 0$ для любого $\mathbf{P}_{\mathfrak{D}}$, и теорема доказана.

В. Доказательство формулы (IV.d). Формула (IV.d) получается из (IV.c), если положить в последней $\nu = \chi(\hat{\mathfrak{D}})$, $\hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}$ и заметить, что произведение $\prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\chi(\mathfrak{D}_p))}$ неразложимо тогда и только тогда, когда набор $\{\mathfrak{D}_p\}$ неразложим.

§ 4. Пример. Семиинварианты случайной функции, квадратически зависящей от гауссовской

Если $\zeta(t)$ — случайная функция от произвольного аргумента $t \in T$, то через $m_\zeta(t_1, \ldots, t_k)$ и $s_\zeta(t_1, \ldots, t_k)$ будем обозначать простые момент и семиинвариант вектора $\{\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)\}$ *.

* См. второе примечание на стр. 343.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ их декартовы произведения самих на себя и пусть $R_t(A)$, $t \in T$, $A \in \mathfrak{B}^2$ — семейство вполне-аддитивных функций множества.

Пусть $\xi(u)$ — действительная гауссовская случайная функция от аргумента $u \in \mathfrak{A}$ со средним $a(u)$ и ковариационной функцией $B(u_1, u_2) = s_\xi(u_1, u_2)$ и пусть

$$\zeta(t) = \int\limits_{\mathfrak{A}^2} \xi(u_1)\,\xi(u_2)\,R_t(du_1, du_2). \tag{12}$$

Вычислим семиинварианты $s_\zeta(t_1, \ldots, t_k)$ для любых $t_1, \ldots, t_k$ в предположении, что

$$\int\limits_{\mathfrak{A}^{2k}} \ldots \int m_{|\xi|}(u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{k1}, u_{k2}) \mid R_{t_1} \mid (du_{11}, du_{22}) \ldots \mid R_{tk} \mid (du_{k1}, du_{k2}) < \infty, \tag{13}$$

где $|\xi|$ обозначает абсолютную величину ξ, а $|R_t|(A)$ — полную вариацию $R_t(A)$. Очевидно, что если (13) выполнено для $k \geqslant 1$, то интеграл в правой части (12) существует с вероятностью единица.

Предварительно заметим следующее. Обозначим пару (u_1, u_2) через $\bar{u}$. Тогда (12) запишется как

$$\zeta(t) = \int\limits_{\mathfrak{A}^2} \eta(\bar{u})\,R_t(d\bar{u}),$$

где $\eta(\bar{u}) = \xi(u_1)\,\xi(u_2)$. По формуле (12) работы [1] имеем*

$$s_\zeta(t_1, \ldots, t_k) = \int\limits_{\mathfrak{A}^{2k}} \ldots \int s_\eta(\bar{u}^{(1)}, \ldots, \bar{u}^{(k)})\,R_{t_1}(d\bar{u}^{(1)}) \ldots R_{t_k}(d\bar{u}^{(k)}). \tag{14}$$

Следовательно, для нахождения $s_\zeta(t_1, \ldots, t_k)$ достаточно найти $s_\eta(\bar{u}^{(1)}, \ldots, \bar{u}^{(k)})$ и подставить в (14). Зафиксируем теперь

$$\bar{u}^{(1)} = (u_{11}, u_{12}), \ldots, \bar{u}^{(k)} = (u_{k1}, u_{k2}).$$

Обозначим далее

$$\eta(\bar{u}^{(l)}) = \eta_l,\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k);\ \xi(u_{lj}) = \xi_{lj};\ \xi = \{\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{k1}, \xi_{k2}\}.$$

Тогда имеем:

$$\eta_l = \xi_{l1}\xi_{l2}.$$

Будем вычислять s_η по формуле (IV.d). В рассматриваемом примере множество $\mathfrak{D}$ состоит из пар чисел (i, j) таких, что $1 \leqslant i \leqslant k$, $j = 1, 2$; таблица (A) имеет вид:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (k,1) & (k,2) \end{matrix}$$

$a_\nu = 1$, если $\nu = \chi(\mathfrak{D})$ и $a_\nu = 0$, если $\nu \neq \chi(\mathfrak{D})$. Формула (IV.d) принимает вид:

$$s_\eta = \sum^{*} \prod_{\bigcup_{p=1}^{q} \mathfrak{D}_p = \mathfrak{D},\ p=1}^{q} s_\xi(\mathfrak{D}_p).$$

* Формула (12) доказана в [1] при более сильных предположениях; однако, используя теорему Фубини и формулу (II.c) настоящей работы, можно доказать ее и в рассматриваемых условиях.

Так как ξ — вектор с гауссовским распределением, то $s_\xi(\mathfrak{D}_p) \neq 0$ лишь в том случае, когда $\mathfrak{D}_p$ состоит из одной или из двух точек.

Пусть e_i и $\bar{e}_i$ равны либо 1, либо 2, причем $e_i \neq \bar{e}_i$. Используя замечание 5, можно показать, что разбиение $\mathfrak{D} = \bigcup_{p=1}^{q} \mathfrak{D}_p$ неразложимо тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих двух случаев:

1. $$\mathfrak{D}_1 = \{(i_1\bar{e}_1), (i_2, e_2)\};\ \mathfrak{D}_2 = \{(i_2, \bar{e}_2), (i_3, e_3)\}; \ldots;$$
$$\mathfrak{D}_{k-1} = \{(i_{k-1}, \bar{e}_{k-1}), (i_k, e_k)\};\ \mathfrak{D}_k = \{(i_k, e_k), (i_1, e_1)\},$$

2. $$\mathfrak{D}_1 = \{(i_1, e_1)\};\ \mathfrak{D}_2 = \{(i_1, \bar{e}_1), (i_2, e_2)\};\ \mathfrak{D}_3 = \{(i_2, \bar{e}_2), (i_3, e_3)\}; \ldots;$$
$$\mathfrak{D}_k = \{(i_{k-1}, \bar{e}_{k-1}), (i_k, e_k)\};\ \mathfrak{D}_{k+1} = \{(i_k, \bar{e}_k)\},$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, k$. Для случая $k = 6$, $i_p = p$, $\bar{e}_p = 1$, $e_p = 2$ эти разбиения изображены на рис. 1 и 2 соответственно.

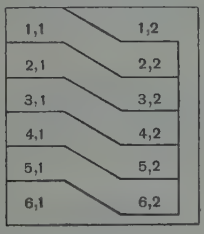

Рис. 1

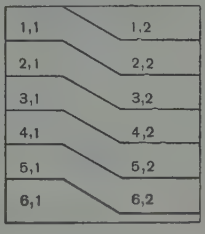

Рис. 2

Легко видеть, что, не ограничивая общности, можно всегда положить в первом случае $i_1 = 1$, $\bar{e}_1 = 1$ и во втором случае $\bar{e}_1 = 1$ и, следовательно, неразложимые разбиения в случае 1 взаимно-однозначно соответствуют парам наборов $\{(i_2, \ldots, i_k), (e_2, \ldots, e_k)\}$, где $(i_2, \ldots, i_k)$ — перестановка чисел $2, 3, \ldots, k$ и $(e_2, \ldots, e_k)$ — набор из единиц и двоек; а в случае 2—парам наборов $\{(i_1, \ldots, i_k), (e_2, \ldots e_k)\}$, где $(i_1, \ldots, i_k)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, k$ и $(e_2, \ldots, e_k)$ — набор из единиц и двоек.

Следовательно,

$$s_{\xi}(\overline{u}^{(1)}, \ldots, \overline{u}^{(k)}) = \sum_{\substack{\{i_2,\ldots,i_k\} \\ \{e_2,\ldots,e_k\}}} B(u_{11}, u_{i_2e_2}) B(u_{i_2\bar{e}_2}, u_{i_3e_3}) \ldots B(u_{i_{k-1}\bar{e}_{k-1}}, u_{i_ke_k}) B(u_{i_k\bar{e}_k}, u_{12}) +$$

$$+ \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\} \\ \{e_2,\ldots,e_k\}}} a(u_{i_12}) B(u_{i_11}, u_{i_2e_2}) B(u_{i_2\bar{e}_2}, u_{i_3e_3}) \ldots B(u_{i_{k-1}\bar{e}_{k-1}}, u_{i_ke_k}) a(u_{i_k\bar{e}_k}), \qquad (15)$$

где соответствующие суммы берутся по всем перестановкам $(i_2, \ldots, i_k)$, $(i_1, \ldots, i_k)$ и по всем наборам $(e_2, \ldots, e_k)$. Так как всегда можно считать, что $R_t(du_1, du_2)$ симметрична относительно du_1 и du_2, то, подставив (15) в (14), внеся интеграл под знак суммы и произведя замену переменных:

$$u_{i_j\bar{e}_j} = u'_{i_j1};\ u_{i_je_j} = u'_{i_j2},$$

получаем:

$$s_\zeta(t_1, \ldots, t_k) = 2^{k-1} \times$$

$$\times \sum_{\{i_2, \ldots, i_k\}} \int\int_{\mathfrak{A}^{2k}} B(u'_{11}, u'_{i_2 2}) B(u'_{i_2 1}, u'_{i_3 2}) \ldots B(u'_{i_{k-1}1}, u'_{i_k 2}) B(u'_{i_k 1} u'_{12}) \times$$

$$\times R_{t_1}(du'_{11}, du'_{12}) \ldots R_{t_k}(du'_{k1}, du'_{k2}) +$$

$$+ 2^{k-1} \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\}} \int \ldots \int_{\mathfrak{A}^{2k}} a(u'_{i_1 2}) B(u'_{i_1 1}, u'_{i_2 2}) \ldots B(u'_{i_{k-1}1}, u'_{i_k 2}) a(u'_{i_k 1}) \times$$

$$\times R_{t_1}(du'_{11}, du'_{12}) \ldots R_{t_k}(du'_{k1}, du'_{k2}). \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что формула (16) может быть переписана в следующем виде (штрихи при аргументах опущены):

$$s_\zeta(t_1, \ldots, t_k) = 2^{k-1}(k-1)! \int \ldots \int_{\mathfrak{A}^{2k}} \overline{B(u_{i_1 1}, u_{i_2 2}) B(u_{i_2 1}, u_{i_3 2}) \ldots B(u_{i_{k-1}1} u_{i_k 2}) B(u_{i_k 2} u_{i_1 2})} \times$$

$$\times R_{t_1}(du_{11}, du_{12}) \ldots R_{t_k}(du_{k1}, du_{k2}) +$$

$$+ 2^{k-1} k! \int \ldots \int_{\mathfrak{A}^{2k}} \overline{a(u_{i_1 2}) B(u_{i_1 1}, u_{i_2 2}) \ldots B(u_{i_{k-1}1}, u_{i_k 2}) a(u_{i_k 1})} \times$$

$$\times R_{t_1}(du_{11}, du_{12}) \ldots R_{t_k}(du_{k1}, du_{k2}), \tag{17}$$

где в обоих случаях черта означает усреднение по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_k)$, при этом внутри первого интеграла усреднение достаточно производить по классам перестановок, совпадающих с точностью до сдвига.

Если $R_{t_i}(du_1, du_2) = R(du_1, du_2)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$, то, сделав в каждом слагаемом формулы (16) замену переменных:

$$u'_{i_j 1} = u_{j1}, \quad u'_{i_j 2} = u_{j2},$$

получаем, что семиинварианты случайной величины ζ_0, определяемой равенством:

$$\zeta_0 = \int\int_{\mathfrak{A}^2} \xi(u_1) \xi(u_2) R(du_1, du_2)$$

имеют вид *:

$$s^{(k)}_{\zeta_0} = 2^{k-1}(k-1)! \int \ldots \int_{\mathfrak{A}^{2k}} B(u_{11}, u_{22}) B(u_{21}, u_{32}) \ldots B(u_{k-1\,1}, u_{k2}) B(u_{k1}, u_{12}) \times$$

$$\times R(du_{11}, du_{12}) \ldots R(du_{k1}, du_{k2}) +$$

$$+ 2^{k-1} k! \int \ldots \int_{\mathfrak{A}^{2k}} a(u_{12}) B(u_{11}, u_{22}) B(u_{21}, u_{32}) \ldots B(u_{k-1\,1} u_{k2}) a(u_{k1}) \times$$

$$\times R(du_{11}, du_{12}) \ldots R(du_{k1}, du_{k2}). \tag{18}$$

Поступила в редакцию
5.3.59

* См. рис. 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы, Автоматика и телемеханика, XIV, № 2 (1953).

[2] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Автоматика и телемеханика, XIV, № 4 (1953).

[3] А. П. Черенков, Прохождение квазинормальных флюктуаций через детектор с фильтром низких частот, Вестник МГУ, сер матем., № 3 (1957).

SUR LE CALCUL DES SÉMI-INVARIANTS

par V. P. LEONOV et A. N. SHIRIAEV

(*Résumé*)

Soit $\eta = Q(\xi)$ la transformation polynomiale du vecteur aléatoire ξ. La règle suivante est établie dans cette notice pour calculer les sémi-invariants de η partant des sémi-invariants de ξ.

Il faut:

1) Exprimer les moments de η par ceux de ξ selon (III);

2) Mettre dans (III) l'expression des moments de ξ par ses sémi-invariants par (I.a);

3) Supprimer dans l'expression obtenue quelques termes selon la loi formulée dans le théorème.

En utilisant cette règle dans le § 4, on a calculé tous les sémi-invariants de fonction alléatoire dépendant quadratiquement de celle de Laplace.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

И. В. ГИРСАНОВ

1. Пусть $X\{x_t(\omega), \mathscr{M}_t, \zeta, \mathbf{P}_x(d\omega)\}$ — однородный по времени строго-марковский процесс с непрерывными траекториями в измеримом топологическом пространстве $(E, \mathscr{E}, \mathscr{B})$; * пусть $\tau_U(\omega)$ — момент первого выхода траектории на границу $\gamma(U)$ области $U \in \mathscr{E} \cap \mathscr{B}$. Множество тех ω, для которых $\tau_U(\omega)$ определено (т. е. траектория достигает $\gamma(U)$), обозначим Ω_U.

Положим $m_U(x) = \int\limits_{\Omega_U} \tau_U(\omega)\, \mathbf{P}_x(d\omega)$,

$$\pi_U(x, \Gamma) = \mathbf{P}_x\{x_{\tau_U}(\omega) \in \Gamma\},\ \Gamma \in \mathscr{B}.$$

В докладе на III Всесоюзном Математическом съезде Е. Б. Дынкиным была поставлена задача — выяснить, для каких классов процессов функции $\pi_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x)$ определяют поведение процесса до момента выхода на границу $\gamma(U)$. Для одномерных регулярных процессов это следует из результатов Феллера [7], [8] и Дынкина [2]; в

* Здесь и в дальнейшем мы будем использовать терминологию, принятую в [4]: $\mathscr{E}$ — обозначает совокупность открытых множеств, $\mathscr{B}$ — алгебру измеримых множеств.

настоящей заметке это будет доказано для невырожденных диффузионных процессов. Уточним постановку задачи. Мы будем рассматривать процессы, принадлежащие классу т. н. феллеровских процессов. Это означает, что полугруппа

$$T_t f(x) = \int_E \mathbf{P}(t, x, dy) f(y),$$

где $\mathbf{P}(t, x, \Gamma) = \mathbf{P}_x\{x_t(\omega) \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ переводит в себя пространство C измеримых ограниченных непрерывных функций на E. Феллеровский процесс с непрерывными траекториями является строго-марковским [3]; его переходные вероятности полностью определяются инфинитезимальным оператором A полугруппы T_t в C.

Дынкин показал в [2], что оператор $\mathfrak{A}$ в C, задаваемый формулой

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{V \searrow x} \frac{\pi_V f(x) - f(x)}{m_V(x)}, \tag{1}$$

является расширением оператора A. *

Здесь $\pi_V f(x) = \int_E \pi_V(x, dy) f(y)$ и символ $\lim_{V \searrow x}$ обозначает предельный переход, когда окрестность V точки x стягивается к x. Можно при этом рассматривать не все окрестности точки x, а только окрестности некоторого определенного вида (например, в случае евклидова пространства — односвязные окрестности с гладкими границами).

Оператор A получается сужением области определения оператора $\mathfrak{A}$ с помощью присоединения некоторых дополнительных условий, которые обычно имеют характер граничных условий. В этом смысле можно говорить, что $\mathfrak{A}$ определяет поведение процесса до выхода на границу области определения.

Наша задача будет состоять в том, чтобы для всякой функции f, заданной в U, вычислить по формуле (1) значение предела для каждого $x \in U$, зная функции $\pi_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x)$ **.

2. Будем теперь считать, что E является n-мерным евклидовым пространством R^n, $\mathscr{B}$ — алгеброй его борелевских подмножеств. Из формулы (1) видно, что для вычисления значения $\mathfrak{A}f$ в точке x достаточно знать для некоторой стягивающейся к x последовательности областей V_n и любой измеримой ограниченной функции $f(x)$ набор функций $\pi_{V_n} f(x)$ и $m_{V_n}(x)$. Соотношение

$$m_V(x) = m_U(x) - \pi_V m_U(x) \tag{2}$$

(верное при $m_U(x) < \infty$) показывает, что определение $\mathfrak{A}f(x)$ при известных $\pi_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x)$ сводится в конечном итоге к определению функций вида $\pi_V f(x)$ по известным функциям $\pi_U f(x)$.

Основная идея изложенной ниже конструкции состоит в следующем: для заданной на $\gamma(V)$ функции f мы строим последовательность f_n на $\gamma(U)$ так, чтобы

$$\pi_V f_n(x) \to \pi_V f(x), \quad x \in V. \tag{3}$$

Если такое построение проведено для процесса X, а процесс $X' = \{x'_t(\omega), \mathscr{M}'_t, \zeta', \mathbf{P}'_x(d\omega)\}$ таков, что *** $\pi'_U(x, \Gamma) = \pi_U(x, \Gamma)$, $m'_U(x) = m_U(x)$, то возникает вопрос — будет ли предел $\pi'_U f'_n(x)$ (который очевидно существует при $x \in V$) совпадать с $\pi'_V f(x)$.

---

* Можно считать, что (1) задает $\mathfrak{A}$ не только на C, но и для всех измеримых функций, для которых существует предел (1).

** Другой подход заключается в построении подпроцесса исходного процесса X, траектории которого обрывались бы в момент выхода из U. На этом пути возникают некоторые формальные трудности, так как подпроцесс феллеровского процесса может уже не быть феллеровским.

*** Штрих означает, что соответствующая величина вычислена для процесса X'.

Следующая лемма устанавливает некоторые достаточные условия, налагаемые на процесс X и область V, при которых такое совпадение действительно имеет место.

Лемма 1. *Пусть X — строго-марковский процесс с непрерывными траекториями в R^n; U и V области в R^n, $V \subset U$.*

Предположим, что

1°. *Для всякой ограниченной непрерывной на $\gamma(V)$ функции* f и точки $x_0 \in \gamma(V)$*

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in V} \pi_V f(x) = f(x_0). \tag{4}$$

2°. *Для всякой ограниченной измеримой функции f существует такая последовательность f_n, для которой выполнено* (3) *и последовательность $\pi_U f_n(x)$ равномерно ограничена на каждом компакте в V.*

Пусть X' — строго-марковский процесс с непрерывными траекториями в R^n, такой что

$$\pi'_U(x, \Gamma) = \pi_U(x, \Gamma). \tag{5}$$

Тогда

$$\pi'_V(x, \Gamma) = \pi_V(x, \Gamma). \quad (\Gamma \in \mathfrak{B}). \tag{6}$$

Доказательство. В силу сделанных относительно $\mathfrak{B}$, X и X' предположений достаточно доказать равенство

$$\pi'_V f(x) = \pi_V f(x), \quad x \in V \tag{7}$$

для любой ограниченной непрерывной на $\gamma(V)$ функции $f(x)$.

Пусть $f(x)$ — такая функция, $f_n(x)$ — последовательность функций, построенная для f и V по свойству 2°, и G — область с компактным в V замыканием. В силу (5) и строгой марковости имеем:

$$\pi_U f_n(x) = \pi'_U f_n(x) = \pi'_G \pi'_U f_n(x) = \pi'_G \pi_U f_n(x), \quad x \in G.$$

Теперь устремим n к бесконечности. В силу 2° законен предельный переход под знаком π'_G:

$$\pi_V f(x) = \lim_{n \to \infty} \pi_U f_n(x) = \pi'_G \lim_{n \to \infty} \pi_U f_n(x) = \pi'_G \pi_V f(x). \tag{8}$$

Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность областей G_n, с компактным в V замыканием такую, что $V = \bigcup_1^\infty G_n$. В силу (4) и сделанных относительно X' предположений,

$$\lim_{n \to \infty} \pi'_{G_n} \pi_V f(x) = \pi'_V f(x), \tag{9}$$

так как $x'_{\tau_{G_n}}(\omega) \to x'_{\tau_V}(\omega)$ с вероятностью 1.

Сравнение (8) и (9) дает (7). Лемма доказана. **

Из доказанной леммы и рассуждений, приведенных в п. 1, мы видим, что для феллеровских процессов с непрерывными траекториями задача об определении поведения процесса в области U по функциям $\pi_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x)$ разрешима, если процесс X та-

---

* Здесь и в ряде других случаев можно было бы считать функцию f заданной только на границе области.

** Можно было бы без труда сформулировать аналогичное утверждение и для процессов в более общих пространствах, чем в R^n.

ков, что у любой точки $x \in U$ существует последовательность окрестностей $V_n \searrow x$, для каждой из которых выполнены условия 1° и 2° леммы 1. Тогда из (1) и (2) следует, что $\pi_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x)$ ($m_U(x) > \infty$) однозначно определяют $\mathfrak{A}f(x)$, $x \in U$ в классе строго-марковских процессов с непрерывными траекториями.

3. Назовем диффузионным процессом в R^n строго-марковский процесс с непрерывными траекториями, для которого область определения оператора $\mathfrak{A}$ содержит все дважды непрерывно-дифференцируемые функции и

$$\mathfrak{A}f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + a_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + c(x) f(x), \quad (c(x) \leqslant 0). \tag{10}$$

Из результатов Векуа [1] следует выполнение 2° для $\mathfrak{A}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}$. Используя одну теорему Ландиса [5], удается получить более общий результат.

Мы отнесем область V к классу $A^{(1,\delta)}$, если для каждой точки $x_0 \in \gamma(V)$ существует окрестность, в которой уравнение границы имеет при некотором i вид:

$$x_i = f(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n)^*$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывно-дифференцируемая функция с производными, удовлетворяющими условию Гельдера с показателем δ.

Обозначим $L^2[\gamma(V)]$ — вещественное гильбертово пространство функций на $\gamma(V)$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{\gamma(V)} f(x) g(x)\, \sigma(dx)$, где $\sigma(dx)$ — естественная мера на $\gamma(V)$.

Нам понадобится следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть U_1 и U_2 — области в R^n, $U_1 \supset \overline{U}_2$, $U_2 \in A^{(1,\delta)}$, $U_1 \setminus U_2$ связно. Пусть коэффициенты оператора $\mathfrak{A}$ в формуле* (10) *удовлетворяют следующим ограничениям:*

1. $\frac{\partial^2 b_{ij}(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}$ *и $c(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ удовлетворяют условию Гельдера.*

2. *Существует $\beta > 0$ такое, что $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ для любого набора n вещественных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$.*

3. *Либо U_1 ограничена, либо существуют: $\alpha < 0$ такое, что $c(x) \leqslant \alpha < 0$, и область $U_3 \in A^{(1,\delta)}$ с непустой границей, содержащая U_1.*

Тогда множество L функций из $L^2[\gamma(U_2)]$, являющихся значениями на $\gamma(U_2)$ дважды-дифференцируемых функций, удовлетворяющих в U_1 уравнению

$$\mathfrak{A}f(x) = 0, \tag{11}$$

всюду плотно в $L^2[\gamma(U_2)]$.

Доказательство. Возьмем область U_3 класса $A^{(1,\delta)}$, содержащую U_2. Ясно, что достаточно доказать лемму, заменив область U_1 на U_3. В силу сделанных относительно оператора $\mathfrak{A}$ и области U_3 предположений, в ней существует фундаментальное решение $\Gamma(x, y)$ уравнения $\mathfrak{A}f = 0$, причем функция $\Gamma(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируемая при $y \neq x$ и удовлетворяет по y уравнению:

$$\mathfrak{A}^* \Gamma(x, y) = 0, \qquad x \neq y,$$

где $\mathfrak{A}^*$ — эллиптический дифференциальный оператор, сопряженный к $\mathfrak{A}$ (см. [6]).

---

* Знак $\hat{x_i}$ означает, что f не зависит от x_i.

Пусть функция $\varphi(x) \in L^2[\gamma(U_2)]$ ортогональна ко всем $f(x) \in L$. Тогда в частности

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{\gamma(U_3)} \Gamma(x, y)\,\varphi(x)\,\sigma(dx) = 0, \quad y \in \gamma(U_3) \\ \int\limits_{\gamma(U_3)} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_y}\,\varphi(x)\,\sigma(dx) = 0, \quad y \in \gamma(U_3) \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

где ν_y — вектор конормали к $\gamma(U_3)$. Рассмотрим функцию $g(y) = \int\limits_{\gamma(U_3)} \Gamma(x, y)\,\varphi(x)\,\sigma(dx)$ (такая функция называется потенциалом простого слоя с плотностью $\varphi(x)$). Легко видеть, что $g(x)$ удовлетворяет всюду в $U_3 \setminus \gamma(U_2)$ уравнению

$$\mathfrak{A}^* g(y) = 0.$$

Из (12) следует, что $g(y) = 0$ и $\frac{\partial g}{\partial \nu_y}(y) = 0$ при $y \in \gamma(U_3)$. Из теоремы единственности решения задачи Коши [5] для оператора $\mathfrak{A}^*$ следует, что $g(y) \equiv 0$ в $U_3 \setminus U_2$. В силу свойств потенциала простого слоя граничные значения $g(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ на $\gamma(U_2)$ почти всюду существуют, если $y \to y_0$ по направлению, не являющемуся касательным к $\gamma(U_2)$ и не зависят от выбора направления, в частности от того, принадлежит y к $U_3 \setminus U_2$ или к U_2. При этом $g(y)$ принимает свои граничные значения в среднеквадратичной метрике; для таких решений сохраняется теорема единственности для первой краевой задачи (см. [6]) и так как $g(y) = 0$ почти всюду на $\gamma(U_2)$, то $g(y) = 0$ в U_2, а стало быть в во всей U_3.

Но так как $g(y)$ является потенциалом простого слоя с плотностью $\varphi(x)$, то почти всюду на $\gamma(U_2)$ выполнены соотношения (см. [6]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g(y)}{\partial \nu_y^+} = -\frac{\varphi(y)}{a(y)} + \int\limits_{\gamma(U_3)} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x}\,\varphi(x)\,\sigma(dx) \\ \frac{\partial g(y)}{\partial \nu_y^-} = +\frac{\varphi(y)}{a(y)} + \int\limits_{\gamma(U_3)} \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x}\,\varphi(x)\,\sigma(dx) \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

где $a(y)$ — некоторая положительная ограниченная функция, а значок $+$ или $-$ при $\partial / \partial \nu_y$ означает дифференцирование по внутренней и внешней конормалям к $\gamma(U_2)$. Так как $g(y) = 0$ и вне и внутри $\gamma(U_2)$, то левые части (13) равны нулю, а следовательно и $\varphi(y) = 0$ почти всюду на $\gamma(U_2)$.

Из лемм 1 и 2 для диффузионных процессов без труда получается следующий результат:

Теорема. *Пусть X — диффузионный процесс, для которого оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет ограничениям леммы 2, U — область в R^n; при этом если U неограничена, то существуют $\alpha < 0$ и $U' \subset A^{(1,\,\delta)}$ такие, что $c(x) \leqslant \alpha$, $U' \supset U$ и $\gamma(U')$ непусто.*

Если для некоторого строго-марковского процесса X' в R^n с непрерывными траекториями $\pi'_U(x, \Gamma) = \pi'_U(x, \Gamma)$ и $m_U(x) = m'_U(x)$, то операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ совпадают в области U.*

Доказательство. Из формул (1) и (2) ясно, что для доказательства совпадения операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ достаточно показать, что $\pi_V(x, \Gamma) = \pi'_V(x, \Gamma)$ для последовательности окрестностей V_n точки x, стягивающихся к x, а $m_U(x) < \infty$. Если области $V_n \in A^{(1,\,\delta)}$ и имеют компактные замыкания, то для них выполнены предположения лем-

* Это последнее надо понимать так, что для всякой f, для которой при $x \in U$ существует $\mathfrak{A}f(x)$, существует и $\mathfrak{A}'f(x)$, причем $\mathfrak{A}f(x) = \mathfrak{A}'f(x)$, и наоборот.

мы 1. Действительно 1° есть тривиальное следствие того факта, что непрерывная в V_n функция φ, удовлетворяющая (11) с непрерывными граничными условиями, непрерывна в замкнутой области $\overline{V_n}$.

Так как всякая ограниченная измеримая f на $\gamma(V_n)$ принадлежит $L^2(\gamma(V_n))$, то по лемме 2 существует последовательность f_k на $\gamma(U)$ такая, что

$$\pi_U f_k(x) \to f(x)$$

в $L^2[\gamma(V_n)]$. Но известно ([6]), что сходимость в среднем квадратичном на $\gamma(V_n)$ функций, удовлетворяющих (11), влечет за собой их равномерную сходимость на каждом компакте в V_n, что сильнее, чем 2°.

Функция $m_U(x)$ является решением уравнения

$$\mathfrak{A} m_U(x) = -1$$

с нулевыми граничными условиями, и поэтому будет конечной для любой ограниченной области U, а также для неограниченной U, если $c(x) \leqslant \alpha < 0$. Теперь, применив лемму 1 и (2), мы получим окончательно

$$\pi_V(x, \Gamma) = \pi'_V(x, \Gamma),$$

$$m_V(x, \Gamma) = m'_V(x, \Gamma),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Было бы очень интересно найти прямое теоретико-вероятностное доказательство теоремы. В заключение я благодарю Е. Б. Дынкина, сделавшего при написании настоящей работы ряд ценных замечаний.

Поступила в редакцию
20.5.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, О полноте системы гармонических полиномов в пространстве, ДАН СССР, **90**, 4 (1953), 495.

[2] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероятн. и ее прим. **I**, 1 (1956), 38—60.

[3] Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич, Строго-марковские процессы, Теория вероятн. и ее примен. **I**, 1 (1956), 145—155.

[4] Е. Б. Дынкин, Основные понятия теории марковских процессов, Физматгиз, 1959.

[5] Е. М. Ландис, О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, **107**, 5 (1956), 640.

[6] К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИИЛ, М., 1957.

[7] W. Feller, The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Ann. of Math., **60**: 3 (1954), 417—436.

[8] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math., **61**, 1 (1955), 90—105

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DES NICHT-SINGULIAREN DIFFUSIONSPROZESSES

J. GIRSSANOV (*MOSKAU*)

(*Zusammenfassung*)

Es sei X — ein nicht-singuliarer Diffusionsprozess in dem n-dimensionalen euklidischen Raum R^n, U — ein Gebiet, τ_u — die Zeit, in der die Grenze von U zum ersten Male erreicht wird.

Im vorliegenden Artikel wird bewiesen, dass der Verlauf des Prozesses X innerhalb U durch die Functionen

$$m(x) = M_x \tau_u \text{ und } \pi(x, \Gamma) = \mathbf{P}_x \{x_{\tau_u} \in \Gamma\}$$

bestimmt wird. Der Beweis ist auf analytische Methoden der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen begründet.

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ЭНТРОПИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Г. П. БАШАРИН

1. Рассмотрим последовательность взаимно независимых случайных величин ξ_1, $\xi_2,\ldots$, $\xi_n,\ldots$, каждая из которых принимает значение E_i с вероятностью p_i $(0 < p_i < 1;$ $i = 1,2,\ldots, s;$ $\sum_1^s p_i = 1)$. Для оценки величины энтропии этой последовательности (см. [1])

$$H(p_1, p_2,\ldots,p_s) = -\sum_1^s p_i \lg_2 p_i \tag{1}$$

на основании выборочных данных в формулу (1) вместо неизвестной априорной вероятности p_i обычно подставляют ее оценку $\hat{p}_i = \frac{m_i}{N}$ $(i = 1,2,\ldots, s)$, где m_i – частота исхода E_i в выборке объема N. Такая статистическая оценка энтропии часто производится в различных приложениях. Например, в [4] производится статистическая оценка энтропии последовательности букв английского печатного текста, в [5] — энтропии последовательности квантованных значений яркости телевизионного сигнала. В связи с этим представляет интерес изучение выборочного распределения случайной величины

$$\hat{H} = H(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_s) = -\sum_1^s \hat{p}_i \lg_2 \hat{p}_i. \tag{2}$$

Ниже показывается, что $\hat{H}$ является смещенной, состоятельной, асимптотически нормальной оценкой энтропии H и что среднее значение и дисперсия этой оценки имеют следующие значения:

$$E\hat{H} = H - \frac{s-1}{2N} \lg_2 e + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{3}$$

$$D\hat{H} = \frac{1}{N}\left[\sum_1^s p_i \lg_2^2 p_i - H^2\right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{4}$$

где через $O\left(\frac{1}{N^a}\right)$ обозначена величина порядка N^{-a} $(a>0)$. При помощи формулы (3) можно оценить величину смещения оценки и, при необходимости, внести в выборочное значение $\hat{H}$ поправку на главный член этого смещения. Используя формулу (4) и асимптотическую нормальность распределения $\hat{H}$, можно вычислить доверительные границы для выборочной оценки энтропии. Интересно отметить, что при $p_1=\ldots=p_s=\frac{1}{s}$ главный член в (4) обращается в 0, т. е. при фиксированном объеме выборки оценка энтропии будет наиболее точной в случае равновероятных исходов.

Выборочное распределение энтропии последовательности случайных величин, связанных в цепь Маркова, в настоящей статье не рассматривается.

2. В этом и последующих разделах под символом ln будет подразумеваться натуральный логарифм, а в окончательных формулах натуральные логарифмы будут выражены через двоичные. Для простоты записи энтропию $-\sum_1^s p_i \ln p_i$ будем обозначать также через H

Разложим функцию $H(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_s)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $(p_1,\ldots,p_s)$, ограничиваясь производными четвертого порядка. Значения производных функции H в точке $(p_1,\ldots,p_s)$ следующие:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=-1-\ln p_i;\ \frac{\partial^k H}{\partial p_i^k}=(-1)^{(k-1)}(k-2)!\,p_i^{-k+1},\quad i=1,2,\ldots,s;\ k\geqslant 2. \tag{5}$$

Смешанные производные всех порядков функции H в точке $(p_1,\ldots,p_s)$ равны 0. Очевидно, что при условии $0<p_i<1$, $i=1,2,\ldots,s$, производные любого порядка функции H непрерывны в окрестности точки $(p_1,\ldots,p_s)$, и, следовательно, функция H может быть разложена в сходящийся ряд Тэйлора (см. [3], п. 185). Это разложение с дополнительным членом в форме Лагранжа можно записать следующим образом:

$$H(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_s)=H(p_1,\ldots,p_s)-\sum_1^s(\hat{p}_i-p_i)(1+\ln p_i)-\frac{1}{2}\sum_1^s\frac{(\hat{p}_i-p_i)^2}{p_i}+$$

$$+\frac{1}{6}\sum_1^s\frac{(\hat{p}_i-p_i)^3}{p_i^2}-\frac{1}{12}\sum_1^s\frac{(\hat{p}_i-p_i)^4}{[p_i+\theta(\hat{p}_i-p_i)]^3}, \tag{6}$$

где $0<\theta<1$.

3. Для того, чтобы с помощью разложения (6) определить моменты оценки $\hat{H}$ нужно вычислить центральные моменты случайных величин $\hat{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,s)$. Выполняя элементарные вычисления, получим следующие значения нескольких первых моментов, которые потребуются в дальнейшем $(i,\ j,\ u=1,2,\ldots,s)$:

$$E\hat{p}_i=p_i;\ E(\hat{p}_i-p_i)^2=\frac{p_i(1-p_i)}{N};\qquad E(\hat{p}_i-p_i)(\hat{p}_j-p_j)=-\frac{p_ip_j}{N},\ i\neq j;$$

$$(\hat{p}_i-p_i)^3=\frac{2p_i^2-3p_i^2+p_i}{N^2};\qquad E(\hat{p}_i-p_i)^2(\hat{p}_j-p_j)=-\frac{p_ip_j(1-2p_i)}{N^2},\ i\neq j; \tag{7}$$

$$E(\hat{p}_i-p_i)(\hat{p}_j-p_j)(\hat{p}_u-p_u)=O\left(\frac{1}{N^2}\right),\ i\neq j\neq u;\qquad E(\hat{p}_i-p_i)^4=O\left(\frac{1}{N^2}\right);$$

$$E(\hat{p}_i-p_i)^2(\hat{p}_j-p_j)^2=O\left(\frac{1}{N^2}\right),\ i\neq j;\qquad E(\hat{p}_i-p_i)^3(\hat{p}_j-p_j)=O\left(\frac{1}{N^2}\right),\ i\neq j;$$

$$E(\hat{p}_i-p_i)^2(\hat{p}_j-p_j)(\hat{p}_u-p_u)=O\left(\frac{1}{N^2}\right),\ i\neq j\neq u;\qquad E(\hat{p}_i-p_i)^3=O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

Остальные моменты имеют порядок малости не ниже, чем N^{-2}.

4. При помощи формул (7) можно вычислить первые четыре момента случайной величины $\hat{H}$. Для среднего значения $\hat{H}$ получим следующее выражение:

$$E\hat{H} = H(p_1,\ldots,p_s) - \frac{s-1}{2N} + \frac{2-3s+\sum_1^s \frac{1}{p_i}}{6N^2} - \frac{1}{12}\sum_1^s E\,\frac{(\hat{p}_i-p_i)^4}{[p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i]^3}.$$

Чтобы оценить остаточный член, заметим, что

$$\frac{(\hat{p}_i-p_i)^4}{[p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i]^3} \leqslant \frac{(\hat{p}_i-p_i)^4}{p_i^3(1-\theta)^3}.$$

Отсюда следует, что $E\,\dfrac{(\hat{p}_i-p_i)^4}{[p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i]^3}$ не превосходит величины порядка N^{-2} и что

$$E\hat{H} = H - \frac{s-1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{3A}$$

Чтобы из этой формулы получить формулу (3), нужно от натуральных логарифмов перейти к двоичным. Для этого достаточно обе части формулы (3А) умножить на $\lg_2 e$.

5. Для вычисления дисперсии $\hat{H}$ воспользуемся следующим соотношением:

$$D\hat{H} = E\left\{\hat{H} - H + \frac{s-1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right\}^2. \tag{8}$$

Используя формулу (6) и ограничиваясь производными третьего порядка, получим, что

$$D\hat{H} = E\left\{-\sum_1^s (\hat{p}_i-p_i)(1+\ln p_i) + \frac{s-1}{2N} - \frac{1}{2}\sum_1^s \frac{(\hat{p}_i-p_i)^2}{p_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\sum_1^s \frac{(\hat{p}_i-p_i)^3}{[p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i]^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right\}^2.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая членами, математическое ожидание которых, согласно формулам (7), имеет порядок малости выше второго, получим следующее выражение для дисперсии:

$$D\hat{H} = E[\sum_1^s (\hat{p}_i-p_i)(1+\ln p_i)]^2 - \frac{1}{3}E\sum_{i,j=1}^s \frac{(\hat{p}_i-p_i)(\hat{p}_j-p_j)^3(1+\ln p_i)}{[p_j(1-\theta)+\theta\hat{p}_j]^2} +$$

$$+ \frac{s-1}{6N}E\sum_1^s \frac{(\hat{p}_i-p_i)^3}{[p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i]^2} - \frac{1}{6}E\sum_{i,j=0}^s \frac{(\hat{p}_i-p_i)^2}{p_i}\,\frac{(\hat{p}_j-p_j)^3}{[p_j(1-\theta)+\theta\hat{p}_j]^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{9}$$

Первый член является величиной порядка N^{-1}:

$$E[\sum_1^s (\hat{p}_i-p_i)(1+\ln p_i)]^2 = \frac{1}{N}\sum_1^s p_i(1-p_i)(1+\ln p_i)^2 -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^s p_i p_j(1+\ln p_i)(1+\ln p_j) = \frac{1}{N}[\sum_1^s p_i \ln^2 p_i - H^2].$$

Покажем, что все остальные члены имеют порядок малости не ниже второго. Для их

оценки воспользуемся неравенством Шварца (см. [2]), 9. 5. 1). Применяя это неравенство к математическому ожиданию под знаком суммы второго члена, получим:

$$E\frac{(\hat{p}_i-p_i)(\hat{p}_j-p_j)^3}{[p_j(1-\theta)+\theta\hat{p}_j]^2}\leqslant\frac{E|\hat{p}_i-p_i||\hat{p}_j-p_j|^3}{p_j^2(1-\theta)^2}\leqslant\frac{\{E(\hat{p}_i-p_i)^2E(\hat{p}_j-p_j)^6\}^{1/2}}{p_j^2(1-\theta)^2}=O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Следовательно, второй член является величиной порядка N^{-2}. Аналогичным образом доказывается, что третий и четвертый члены в правой части формулы (9) имеют порядок $N^{-\frac{5}{2}}$. Итак, мы доказали, что

$$D\hat{H}=\frac{1}{N}[\sum_1^s p_i\ln^2 p_i-H^2]+O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{4A}$$

Чтобы перейти от формулы (4A) к формуле (4), достаточно обе части формулы (4A) умножить на $\lg_2^2 e$.

Аналогичным образом можно показать, что коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины $\hat{H}$ имеют порядок N^{-2}.

6. Чтобы доказать, что при $N\to\infty$ распределение $\hat{H}$ сходится к нормальному распределению со средним значением (3) и дисперсией (4), запишем разложение (6) в виде

$$\sqrt{N}(\hat{H}-H)=-\sqrt{N}\sum_1^s(\hat{p}_i-p_i)(1+\ln p_i)-\frac{\sqrt{N}}{2}\sum_1^s\frac{(\hat{p}_i-p_i)^2}{p_i(1-\theta)+\theta\hat{p}_i}$$

и применим к случайной величине $\sqrt{N}(\hat{H}-H)$ теорему 28.4 из [2]. Следовательно, $\hat{H}$ является асимптотически нормальной оценкой энтропии.

Поступила в редакцию
16. 2. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Shannon. The Mathematical Theory of Communication, The Univ. of Illinois Press, 1949, 3—89.
[2] Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
[3] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 1947.
[4] C. E. Shannon, Prediction and Entropy of Printed English, Bell. Sust. Techn. Journ., 30, No. 1, 1951.
[5] Д. С. Лебедев, Е. И. Пийль, Исследование статистики телевизионных сообщений, Отчет ЛПС АН СССР, 1957.

ON A STATISTICAL ESTIMATE FOR THE ENTROPY OF A SEQUENCE OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

G. P. BASHARIN (MOSCOW)

(Summary)

The mean value and variance are computed for a statistical estimate for the entropy of a sequence of mutually independent random variables having a similar distribution. The estimate is shown to be biased, consistent and asymptotically normal.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1959

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

М. ФИШ. Теория вероятностей и математическая статистика, 2 издание (Marek Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statistika matematyczna), Warszawa, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1958, стр. 530 (польск.).

В известной польской серии «Biblioteka Matematiczna» № 18 недавно появилось второе издание учебника теории вероятностей и математической статистики, принадлежащего перу профессора Варшавского Университета М. Фиша. По сравнению с первым изданием, вышедшим в том же издательстве четыре года назад, книга подверглась значительной переработке. Достаточно сказать, что книга увеличилась более чем на 150 страниц, в ней добавились три заново написанные главы (Цепи Маркова, Стохастические процессы, Набросок теории серий); вместо 107 параграфов, имевшихся в первом издании, стало 142 параграфа и значительной переработке подвергнуты почти все ранее имевшиеся главы.

Книга стремится дать достаточно широкое знакомство с большинством наиболее значительных разделов современных теории вероятностей и математической статистики без того, чтобы предъявлять к читателю и его математической подготовке излишне высокие требования. В то же время автор остается неизменно строг в изложении и уделяет особое внимание новым понятиям. Для того чтобы ввести читателя в современные исследования, автор постоянно отводит место для рассказа о современных исследованиях в соответственных разделах излагаемых дисциплин и приводит значительную библиографию учебной монографической и журнальной литературы (202 наименования), к которой отсылает читателя за подробностями.

Книга разбита на две части. К первой из них отнесены восемь глав, посвященных теории вероятностей; ко второй принадлежат девять глав, относящихся к математической статистике. Содержание и объем сообщаемого материала будут ясны из последующего обзора всех семнадцати глав.

Глава 1 «Случайные события» (26 стр.). В этой главе читатель получает сначала интуитивное, а затем строгое представление о случайном событии и о его вероятности. Аксиоматическое изложение основ теории вероятностей ведется по Колмогорову. Выведены формулы полной вероятности Бейеса, введено понятие независимых событий.

Глава 2 «Случайные величины» (31 стр.). Случайная величина определена как измеримая по вероятности функция элементарного события. Основная часть главы посвящена выводу общих свойств одномерных и многомерных функций распределения, а также нахождению распределений функций от случайных величин, по заданным распределениям последних.

Глава 3 «Параметры распределения случайной величины» (34 стр.). Введены и изучены понятия математического ожидания, дисперсии, моментов, медианы, коэффициента корреляции, коэффициентов регрессии. Выведены неравенства Чебышева и Ляпунова. Рассмотрены уравнения регрессии.

Глава 4 «Характеристические функции» (19 стр.). Рассмотрены определения и основные свойства характеристических функций как одномерных, так и многомерных случайных величин. Выведена формула обращения. Введены понятия семиинвариантов и производящей функции.

Глава 5 «Некоторые распределения» (41 стр.). Рассмотрены распределения несобственное, Бернулли, Пуассона, Пойа, гипергеометрическое, равномерное, нормальное, Гамма, Бэта, Коши, Лапласа. Помимо определения соответствующих распределений, для них вычислены основные параметры (математическое ожидание, дисперсия), а в

некоторых случаях также характеристические функции. Рассмотрены многомерное нормальное распределение и последовательность независимых испытаний с конечным числом возможных исходов. Заключительный параграф посвящен рассмотрению распределений, зависящих от случайного параметра.

Глава 6 «Предельные теоремы» (59 стр.). Только в этой главе читатель впервые сталкивается с предельными теоремами теории вероятностей. После определения сходимости по вероятности, доказаны последовательно закон больших чисел в форме Бернулли, предельная теорема для характеристических функций (прямая и обратная), теоремы Муавра—Лапласа (интегральная), Линдеберга—Леви, Ляпунова, Линдеберга—Феллера, локальная теорема Б. В. Гнеденко, закон больших чисел в форме Пуассона, Чебышева и Хинчина, усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова и многомерная теорема Муавра—Лапласа. При доказательстве теоремы Муавра—Лапласа и ее многомерного обобщения, естественно, используется метод характеристических функций.

Глава 7 «Цепи Маркова» (19 стр.). Введено понятие однородной цепи Маркова, рассмотрены свойства матрицы переходных вероятностей, изложена классификация состояний, данная А. Н. Колмогоровым, доказана одна эргодическая теорема, приведены без доказательств формулировки закона больших чисел и предельной теоремы о сходимости к нормальному распределению для сумм случайных величин, связанных цепной зависимостью.

Глава 8 «Стохастические процессы» (46 стр.). Основное внимание автор уделяет процессам марковского типа с конечным и счетным множеством состояний. Вкратце изучен нормальный процесс с независимыми приращениями (броуновский процесс) и дано представление о стационарных процессах. Достаточно подробно изучены процессы Юла—Фарри, Пуассона, рождения и смерти, выведена формула Эрланга. Выведены уравнения Колмогорова для процессов со счетным множеством состояний и для непрерывных марковских процессов.

Глава 9 «Выборочные моменты и их функции» (32 стр.). После определения понятия статистики, как функции от результатов наблюдений, автор подробно останавливается на рассмотрении ряда статистик для случая исходного нормального распределения. Именно рассмотрены распределения среднего арифметического результатов наблюдений, совместное распределение $\bar{x}$ и среднего квадратического уклонения, χ^2, Стьюдента, Фишера, коэффициентов корреляции и регрессии. Для ненормального исходного распределения изучено распределение среднего арифметического и предельные распределения для эмпирических моментов.

Глава 10 «Распределение упорядоченных статистик» (36 стр.). Введено понятие вариационного ряда, эмпирической функции распределения. Найдены распределения вероятностей произвольного члена вариационного ряда и предельные распределения для квантилей. Рассмотрено понятие толерантных пределов. Доказаны теоремы В. И. Гливенко, Б. В. Гнеденко, В. С. Королюка. Приведены без доказательства формулировки теорем А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, А. Реньи относительно эмпирических распределений. Рассмотрена задача сравнения k выборок.

Глава 11 «Очерк теорий серий» (9 стр.). Теория серий, играющая в современной статистике значительную роль, изложена в книге бегло и до некоторой степени формально, без указания статистических правил, которые могут быть выведены из наблюдения закономерностей чередования серий.

Глава 12 «Критерии значимости» (28 стр.). Хорошо, в доступной форме, с рассмотрением большого числа простых примеров введены понятия статистического критерия; различия в выводах, которые можно делать в случае малой и большой выборок. Подробно рассмотрен критерий согласия χ^2 для проверки согласия данного распределения с результатами испытаний. За доказательствами некоторых результатов автор отсылает читателя к известной книге Г. Крамера «Математические методы статистики» (Изд. Иностр. литер., Москва, 1948). Излагаются статистические критерии, основанные на теоремах Колмогорова и Смирнова об эмпирических функциях распределения. Излагается также критерий Вальда и Вольфовица проверки однородности двух выборок.

Глава 13 «Теория оценок» (34 стр.). Речь идет об оценке значений параметров по результатам выборки. С этой целью вводятся понятия состоятельной, несмещенной,

достаточной, эффективной, асимптотически эффективной оценок. Рассмотрен метод максимального правдоподобия. Глава обильно проиллюстрирована примерами.

Глава 14 «Методы и схемы производства выборок» (19 стр.). Рассказано о всевозможных методах производства выборок, о таблицах случайных чисел. Для советского читателя новым окажется та часть главы, в которой рассказывается о предложенных Штейнхаузом иных методах случайного отбора проб — о таблицах чисел перетасованных и таблицах железных чисел.

Глава 15 «Очерк дисперсионного анализа» (16 стр.). Дан краткий набросок теории дисперсионного анализа.

Глава 16 «Общая теория статистических критериев» (23 стр.). Даны определения мощности критерия, критической области, оперативной характеристики критерия, наиболее мощного критерия, равномерно наиболее мощного критерия.

Глава 17 «Элементы последовательного анализа» (26 стр.). Дан хороший краткий набросок теории последовательного анализа Вальда.

В конце книги приведены краткие, но удачные таблицы закона Пуассона, нормального распределения, распределения χ^2, распределения Стьюдента, z-распределения Фишера, распределения Колмогорова. Именной и предметный указатели позволяют быстро ориентироваться в необходимых местах книги.

В заключение следует сказать следующее: учебник М. Фиша составлен удачно. Можно спорить с автором о последовательности расположения материала, о месте, скажем, теоремы Лапласа—Муавра или же о том, что слишком поздно появляются конкретные распределения. Однако в ответ у автора найдутся достаточно веские основания отстаивать именно этот избранный им порядок. Одновременно хотелось бы высказать пожелание, чтобы в книге стационарные процессы, получившие в последние годы многочисленные серьезные применения в разнообразных областях исследований, получили несколько большее число страниц. В целом же книгу следует признать весьма удачной, а ее одновременное издание на немецком языке в ГДР (M. Fisz, Wahrscheitsrechnung und Mathematische statistik, Deutsche Verlag der Wissensaften, Berlin, 1958) вполне оправданным.

Б. В. Гнеденко

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В — 234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B—234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Подписано к печати 13/VII-1959 г. Формат бумаги 70×108 1/16. Бум. л. 3 3/4 Печ. л. 10,27
Уч.-изд. л. 10,2 Тираж 2125 экз. Заказ 3516 Т-08602

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~11 р. 25 к.~~ 2-26